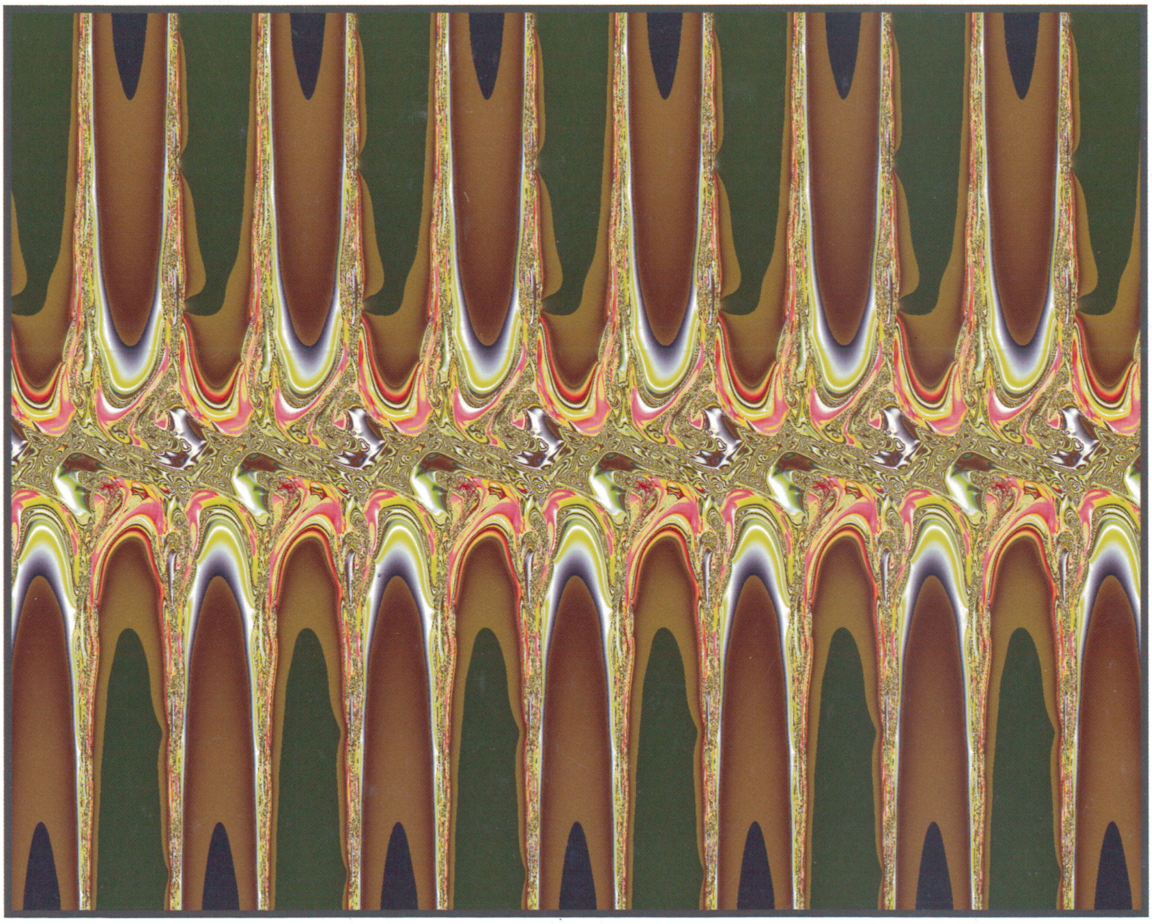
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2008年6月1日発行　第46巻6号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

6
2008

特集 線形代数の力
その歴史から多彩な応用まで



No.540

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 540 June 2008

線形代数の力
その歴史から多彩な応用まで

表紙：戸川　隼人

June 2008

MATHEMATICAL
SCIENCES

Number 540

特集／線形代数の力

線形代数小史

齋藤　正彦

解析学からはじめよう．オイラー（18 世紀）は，定数係数の n 階斉次線形微分方程式の一般解が，適当にえらんだ n 個の特殊解の線形結合として書けることを証明した．《適当な》というのは，いまのことばを使えば《線形独立な》ということである．

その少しあと，ラグランジュはオイラーの結果を，必ずしも定数係数でない n 階斉次線形微分方程式の場合に一般化した．

これらの結果をいまのことばに直せば，n 階斉次線形微分方程式の解ぜんぶの集合が，解関数たちの加法とスカラー乗法によって，n 次元の実線形空間になる，ということである．

しかし，そのころ線形空間（ベクトル空間とも言う）の概念はなかった．ベクトルという概念もまだ《大きさと向きをもつ量》という物理学的なものであり，数ベクトルもなく，まして関数をベクトルとみなす発想はなかった．

実は公理による線形空間の定義は，線形代数史のほぼ最後にくるものであり，それは 19 世紀末のペアノまで待たなければならない．

つぎに幾何学について言えば，17 世紀の前半にデカルトとフェルマが座標幾何（最近まで解析幾何と呼ばれていた）をはじめてから代数化がすすむ．平面上の 2 直線の交点（一般には共通点の全体）を求めることが，2×2 型の 1 次方程式系を解くことになる．空間内の 3 平面の共通点（の全体）を求めることが，3×3 型の 1 次方程式を解くことになる．

こうして幾何学からも線形代数がはじまる．いまでは n 次元ユークリッド空間は，n 次元の実線形空間に正値 2 次形式がついたものとして理解される．

線形代数は連立 1 次方程式を解くことからはじまる．n 個の未知数に関する m 元連立 1 次方程式を $m \times n$ 型の 1 次方程式系ということにすれば，当然まず 2×2 型である．つぎに 3×3 型にすすみ，さらに $n > 3$ の場合に一般化される．$m \neq n$ の場合の考察はおくれる．

1 次方程式系を解くことから，自然な流れとして行列式の概念が導入される．

すでに 17 世紀に，ライプニッツは行列式の概念を得ていた．同じころ，関孝和も行列式を扱っていた．

行列式を使う 1 次方程式系の解法でもっとも重要なのは，有名なクラメールの公式だろう．18 世紀なかばにクラメールは，$n \times n$ 型の場合のこの公式を発表したが，証明はついていなかった．

大学でも 20 世紀の前半までは，どの教科書にもほぼクラメールの公式だけが，1 次方程式系の解法として出ていた．

必ずしも 1 次方程式系の解法と結びつかない，行列式固有の理論は，18 世紀後半のヴァンデルモンド（ヴァンデルモンドの行列式）とラプラス（行列式の余因子によるラプラス展開）からはじまる．行列式論はコーシーによって大きく発展した．い

まの記号で $\det AB = \det A \cdot \det B$ とかける乗法定理もコーシーによる．行列式（determinant）ということばは，19 世紀の冒頭にガウスが 2 元 2 次形式の判別式の意味で使ったのが最初らしい．とにかく，行列にその座を奪われるまで，行列式は線形代数の主役だった．

ここで 1 次方程式系に戻ると，19 世紀のはじめにガウスは《ガウスの消去法》を開発した．これは行列式を使わないので，$m \neq n$ のときにも適用できる．行列記号はまだなかったけれども，ガウスの消去法は，現代の行列の基本変形による標準化とほぼ同じ内容である．

現在の線形代数の中核を占める行列の概念もガウスにはじまる．$m \times n$ の表としての行列は，1 次方程式系・線形変換・2 次形式に関連して導入された．ガウスは，ふたつの整係数の 2 元 2 次形式の同値性を，その値集合が一致することと定義し，そのための条件として，ふたつの 2 次形式が変数の行列式 1 の線形変換によって移りあうという結果を得た．

行列論にとって本質的なのは行列同士の演算，とくに掛け算ができることである．行列の積が，対応する線形写像の合成写像に対応することも，ガウスは認識していた．

現代風の行列論の基礎を作ったのは，19 世紀なかばのケイリー，シルヴェスターおよびハミルトンである．かれらは行列をひとつの文字で表わしたが，これも大きな進歩である．行列（matrix）ということばはシルヴェスターによる．

ケイリーは有名なケイリー・ハミルトンの定理を提出した．これは任意の正方行列がその特性方程式をみたす，というものである．証明は 2×2 型行列に対するもの（これはいま日本の高校で教えている）だが，ケイリーは 3×3 のときも成りたつことを確かめ，さらにこの定理がもっと一般的に成りたつ，と言っている．一方ハミルトンは，かれが執念をもやして作りあげた 4 元数論のなかで，4×4 型行列に対するケイリー・ハミルトンの定理を証明した．

このほか 19 世紀中葉にはコーシー，ヤコービ，ヴァイエルシュトラスその他の人びとによって行列論はおおいに進歩した．固有値や標準形の理論ができ，対称行列・直交行列・ユニタリ行列などの重要性が認識された．なかでも，ヴァイエルシュトラスとジョルダンによって独立に与えられたジョルダン標準形定理は重要である．

フロベニウスは行列論を群の表現論や多元数論に適用し，実多元体が実数体・複素数体・4 元数体にかぎることを証明した．ケイリーは 4 元数体が複素 2 次行列環に埋めこまれることを示した．こうして行列論は線形代数の中心を占めるにいたった．

さて，複素数や 4 元数を通じて数ベクトルが認識され，それらについての線形独立性・基底・次元の概念が導入される．そして 3 次元，4 次元から n 次元へと飛躍する．

たとえばデデキント．有理数体 $\mathbb{Q}$ に代数的数 α を添加した体 $\mathbb{Q}(\alpha)$ を考える（数体の概念もデデキントによる）．α の最小多項式が n 次なら，$\mathbb{Q}(\alpha)$ の各元は

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}, \quad (a_i \in \mathbb{Q})$$

の形にひととおりに書ける．こうして n 個の数，$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{n-1}$ は $\mathbb{Q}$ 上の線形空間 $\mathbb{Q}(\alpha)$ の基底になる．デデキントの他の仕事同様，ここでも論調は現代的で明晰である．

以上のような流れの最後にペアノが来て線形代数を公理化する（1888）．ペアノは，n 次以下の多項式の全体が $n+1$ 次元線形空間になると言い，もし次数の制限がなければ，多項式の全体は無限次元線形空間になるとまで言っている．

ペアノの公理主義があまりに先駆的だったため，その影響はゆっくりだったが，1920 年代はじめにバナッハ空間や加群（ネーターによる）があらわれ，現代の枠組が出そろう．

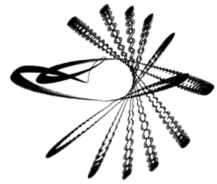
以上の論稿を書くにあたってつぎの本を参考にした．

Israel KLEINER: “A History of Abstract Algebra” Birkhäuser (2007).

（さいとう・まさひこ，東京大学名誉教授）

線形空間とは何か

用語に親しむ



高橋　大輔

1. 規格こそ命

世の中は規格だらけである．例えばかの有名なJIS（日本工業規格）は日本における様々な規格を定めている．その一例としてバーコード規格の一部を引用すると，

> 標準バージョンは，11 モジュールのレフトマージン，95 モジュールのバーコード，7 モジュールのライトマージン及び OCR-B 字体の文字で構成する．基本とする 1 モジュールの寸法は，0.33 mm 幅とする．

とある[1)]．一見ギョッとするが，図が付いていてそれを照らし合わせると，レジでピッとする例のバーコードのあり方がおおよそ想像できる (図 1)．規格は皆が共通に使うためのものであり，慎重な検討によって決まったであろうから，なぜ 95 モジュールなのか？ 1 mm 幅ではだめなのか？ などという疑問を呈するのはややむなしい．

まだこれぐらいの規格ならなんとか「読める」が，C#というプログラム言語の「メソッド」については

> メソッドは，オブジェクト又はクラスによって実行される計算又は動作を実装するメンバである．メソッドは，空も可能な仮引数並び，及び（返却値の型が void 以外の場合は）返却値をもち，静的又は非静的のいずれかとなる．

となっている[2)]．プログラムの経験がない人にとってはボーゼンとする文章である．そもそも規格はすらすらと読むようにはできていない．しかし，解説書を読み，たくさんのプログラムを書き，幾多の試練を経た後には，なぜメソッドとやらがあって静的や非静的という概念が必要なのか，じわじわ理解できる．そのときにもう一度この規格を読むと，その無駄のなさ，緻密さに「よくできているなあ」と感心するのである．

実は，自由を尊重する学問も規格だらけである．その中でも数学の規格は論理的に厳しいことが特徴である．ただし規格とは呼ばずに**定義**と呼ぶことが多い．それらを講義や教科書で初めて目にして数学は難しい，と判断してはいけない．なぜなら，上で紹介した JIS 規格のようなものにいきなり出くわしたに等しく，意味や利用方法をただちに理解するのは無理なのである．

4 912345 678904

図 1　バーコードの例．

2. 十円玉と十円

では，定義はどのようにして理解すればいいの

であろうか．定義から導かれる法則や応用例を学んで慣れるという手が考えられる．しかし，規格に従うことと規格の成り立ちを知ることが違うように，定義自体の意味については，なぜそのような定義になるのかよく考えてみて初めてわかることである．

表題の線形空間に向けて徐々に話題を移していこう．まずは線形空間につきもののの**ベクトル**について考える．例として平面内のベクトルを取り上げよう．ベクトルは「向きと大きさ（長さ）だけで定まる量」であり，したがって図 2 のベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ は同じである，というような言い方をよくする．しかし，ずれた位置にある $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ が同じとは奇妙である．

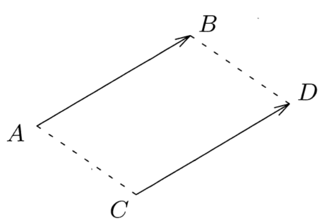


図 2　同じベクトル？

実は，$\overrightarrow{AB}$ という書き方は誤解を招きやすい．図に示されているのは A を始点とし，B を終点とする**有向線分** AB のことであり，これは CD とは当然異なる．そこから始点，終点などの位置情報を取り除き，**変位**だけを量として表したのがベクトルである．繰り返しになるが，ベクトルは向きと大きさ「だけ」で定まる．$\overrightarrow{AB}$ という表記には点 A, B の情報が含まれているにもかかわらず，それらを無視しなければならない．

結局，「$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ が同じ」という表現は，「あなたの十円玉と私の十円玉は違うが，貨幣価値としての十円は同じである」という表現と似たようなものである．存在としての十円玉（有向線分）と法的に定められた十円という価値（ベクトル）との差である．

このように，定義を理解しようとする場合には細かい部分にも神経を行き渡らせなければならず，慣れないうちは疲れる．が，上の話の中で「向き」と「大きさ」も実体に付随し得る概念だが，ベクトルと同じようにこれと指し示すことは実は不可能である．それにもかかわらず，我々はとっくの昔に慣れている．やはり慣れとは恐ろしく，かつ大事である．

■　3. 線形空間は空間でない？　■

では，いよいよ**線形空間**について考える．線形空間は**ベクトル空間**ともいう．線形やベクトルという語は数学的なにおいがするので油断がないが，空間という語は日常でも用い，うっかりすると誤解してしまう．日常で空間というと物理的な拡がりのことをいう．平面と対比させて 2 次元でない 3 次元的な拡がりを意味することも多い．さらに，空間には何でも入るイメージがある．例えば人や机や地球のような実存するもの，剛体や電場のような物理的対象，空間図形や座標軸のような数学的対象など，脳の内外で認識できるものが同居し得る．

ところが，線形空間という語で用いられている**空間**は，簡単に言うと集合，すなわち一定の条件のもとで集めた物の集まりのことである．集合では集めた物のことを**元**という．ただし，空間という言葉は，単なる元の集まりを指すのではなく，特定の構造を持たせた集合に対して用いる．例えば元どうしに距離（これも日常の距離より広い意味で用いるのでややこしい）を定義したときの集合を距離空間と呼ぶ．

この「空間」のような基本用語の説明は教科書でもしばしば省略されており，そこでいきなりつまずく人や後で悩む人が意外に多い．しかし一冊の教科書ですべてを解説するのは無理がある．そういうときは，調べたり尋ねたりした後で，再び自分で考えて納得する他ない．

では，線形空間とは何であろうか．その定義を以下に示す．なお，以下で**体**というのは 0 で割る以外の四則演算が可能な数の集合のことで，本稿では体 K は実数全体を指す**実数体**であるとしておく．

線形空間の定義

集合 V が以下の和とスカラー倍の条件を満たすとき，V を（体 K 上の）線形空間あるいはベクトル空間といい，V の元をベクトルという．

[和]　V の任意の元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ が定義され，それも V の元であり，次の条件が成立する．

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(3) ある元 $\mathbf{0}$ が存在し，すべての $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ となる．この $\mathbf{0}$ のことを零ベクトルという．

(4) 任意の元 $\boldsymbol{a}$ に対して，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ となる V の元 $\boldsymbol{b}$ がそれぞれの $\boldsymbol{a}$ に対して存在する．

[スカラー倍]　V の任意の元 $\boldsymbol{a}$ と K の任意の数 λ に対してスカラー倍 $\lambda\boldsymbol{a}$ が定義され，それも V の元であり，次の条件が成立する．

(5) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

(6) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(7) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$.

(8) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

上の文章は非常に肩の凝る表現をしている．もっとわかりやすい文章にできればいいが，内容は必要にして十分かつ論理的に厳密でなければならない．JIS 規格の文章と似たような感じになるのは仕方のないことである．

しかし，式で書かれた条件を見ると，2 次元や 3 次元のベクトルで習った法則と同じである．そこで，成分表示した 2 次元**数ベクトル** (x, y) について考えてみよう．（紙面の都合より成分を横に並べた形で表示する．）

元がベクトルであるから V はベクトルの集合である．では例えば 2 つのベクトルから成る

$$V=\{(1,0),(0,1)\}$$

は線形空間であろうか．これはすぐに却下できる．なぜなら $\boldsymbol{a}=(1,0)$, $\boldsymbol{b}=(0,1)$ としたときに和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,1)$ は V の元でないからである．また，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=(1,0)$ のとき $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,0)$ となってこれも V にない．ということは，$(1,0)$, $(0,1)$ が V の元であるなら，

(自然数，自然数)

のベクトルをすべて V に含めれば和で閉じる．これで (1), (2) はパスする．しかし，次に (3) で困る．$\mathbf{0}=(0,0)$ を V の元に含めなければいけない．これで (1), (2), (3) はパス．ところが (4) でまた困る．$\boldsymbol{a}=(1,0)$ としたとき $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{b}$ は $(-1,0)$ である．ということは

(整数，整数)

のベクトルをすべて V に含めなければならない．

では次にスカラー倍．K を実数体とするので，λ は整数だけでなく有理数や無理数もあり得る．すると $\lambda\boldsymbol{a}$ が V の元であることより，

(実数，実数)

のベクトルをすべて V に含めなければならない．すると (5)～(8) は成り立つので，「成分が実数の 2 次元数ベクトル全体」が線形空間であるとわかる．同様に成分が実数の 3 次元数ベクトル (x, y, z) 全体も線形空間である．

■　4. 部分なのに一人前　■

前節で $V=\{(x, y)\,|\,x, y$ は実数$\}$ が実数体 K 上で線形空間になることを示した．線形空間であるためには (x, y) の形をしたベクトルを全部集めなければいけないように見える．ところが，出発点をベクトル $(1,0)$ ひとつだけにし，(1)～(8) を満たすためにどれだけの仲間が必要か考えると，

$$V_1=\{(x,0)\,|\,x \text{ は実数}\}$$

も線形空間になることがすぐに確認できる．その他にも

$$V_2=\{(0,x)\,|\,x \text{ は実数}\},\ V_3=\{(2x,x)\,|\,x \text{ は実数}\}$$

も線形空間になる．これらはどれも V の**部分集**

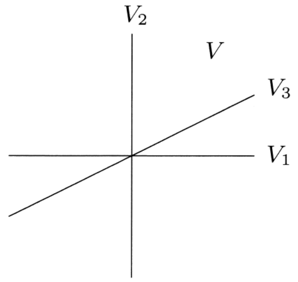


図 3　線形空間 V の部分空間 V_1, V_2, V_3.

合である.

そこで，それら線形空間に含まれる数ベクトルを座標平面内の点の座標とみなして図に表すと，図 3 のようになる．また，$V_1 \sim V_3$ のような部分集合のことを（**線形**）**部分空間**と呼ぶ．ただし，部分空間は単なる部分集合ではなく，それ自体も線形空間として一人前，すなわち条件 (1)〜(8) が成り立たなければならない．ところがそのために必要なことは，和とスカラー倍によって自らの集合からはずれたものを生み出さないことだけである．(1)〜(8) については，もとの線形空間の部分集合なので，すでに準備ずみなのである．よって線形空間 V の部分集合 W が部分空間であるための必要十分条件は，以下で与えられる．

(i) $W \subset V$ かつ $W \neq \phi$（空集合）.
(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ ならば $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$.
(iii) $\boldsymbol{a} \in W, \lambda \in K$ ならば $\lambda\boldsymbol{a} \in W$.

では，2 つの部分空間 $\{(x, 0)\}, \{(0, y)\}$ の和集合 $S = \{(x, 0)\} \cup \{(0, y)\}$ は V の部分空間であろうか．部分空間も線形空間であり，もしもベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が元ならば，両者の**線形結合** $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$ もその部分空間に含まれているはずである．よって例えば $(1, 1) \in S$ でなければならず，S は部分空間とならない．

以上のことから 2 次元数ベクトル全体 V の部分空間は，前のように図で表すなら原点を通る直線しかなさそうである．が，2 つ例外があり，V 自体も V の部分集合なので部分空間であり，零ベクトル $\mathbf{0}$ だけの集合 $\{(0, 0)\}$ も部分空間である．後者の場合，線形空間の定義の $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$ には $\mathbf{0}$ しか取れず，確かに定義を満たしている．以上から V の部分空間は，図で表すと

平面全体，原点を通る任意の直線，原点のみ

の 3 通りがある.

■ 5. あっち向いて，次元 ■

2 次元数ベクトルの線形空間（部分空間）を図で表したときに出てくる平面と直線と点は明らかに特徴を異にする図形であり，それぞれ 2, 1, 0 次元の図形となっている．この 2, 1, 0 のことを**次元**と呼ぶことに我々はいつのまにか慣れているが，何を数えて 2, 1, 0 なのだろうか．数ベクトル表示の成分の個数はどれも 2 なので，これを数えているのではない.

平面の線形空間の任意のベクトルは平行でない 2 つの非零ベクトルの線形結合 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2$ で表せ，直線の線形空間の任意のベクトルは 1 つの非零ベクトルの線形結合 $\lambda\boldsymbol{a}$（1 つなので単なるスカラー倍）で表せ，一点 $\mathbf{0}$ の線形空間はそのような線形結合の表現がない．このようにいくつかのベクトルの線形結合ですべての元を表現したときの，ベクトルの個数を次元と呼ぶとよさそうである．しかしそれだけでは，平面の線形空間の場合，適当に 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1 \sim \boldsymbol{a}_3$ を選んで $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3$ としても任意のベクトルを表せてしまい，3 次元ということになりかねない.

そこで**線形独立**という重要な概念が必要となる．ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \sim \boldsymbol{a}_N$ に対して

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_N\boldsymbol{a}_N = \mathbf{0}$$

という方程式を考える．これを満足する $\lambda_1 \sim \lambda_N$ が $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_N = 0$ しかないときにベクトル $\boldsymbol{a}_1 \sim \boldsymbol{a}_N$ は線形独立であるという．例えば平面の線形空間の場合，3 つの平行でない非零ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \sim \boldsymbol{a}_3$ を選んで

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$$

としても，$\boldsymbol{a}_3 = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ と表せるような c_1,

c_2 が存在するので,

$$(\lambda_1 + c_1\lambda_3)\boldsymbol{a}_1 + (\lambda_2 + c_2\lambda_3)\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$$

となり，例えば $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (c_1, c_2, -1)$ のとき方程式が満足される．よって線形独立でない．

要するに線形独立とは

> すべてのベクトルが互いに「あっち」を向いていてどれも他の線形結合で表せない

ような関係のことをいう．そして線形空間 V の次元は

> V の任意のベクトルをその線形結合で表せるような線形独立なベクトルの個数

のことと定義される．この定義はまさに「必要最小限」の精神が生きている．定義にあてはまるような線形独立なベクトルの組（**基底**という）はいくらでも存在するので，個数 N が一通りに定まらないように思える．ところが，「任意の」という部分で N の最小値が指定され，「線形独立な」という部分で N の最大値が指定され，「任意の」かつ「線形独立な」の合わせ技によって，N はどのような組を持ってきても一通りに定まってしまうのである（図 4）．（ただし，今は N が有限の場合，すなわち V が有限次元の場合のみに限定している.）

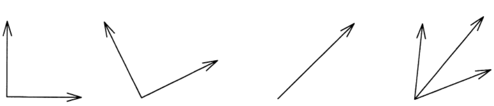


図 4　平面ベクトルの基底.

しかもこれが数学の恐ろしいところであるが，このような N の一意性の証明は，図形を持ち出さなくても，成分表示をしなくても，最初の線形空間の定義だけから導くことができるのである！

■　6. 定義を外せばよくわかる　■

いろいろな JIS 規格が現在の形になるためには

歴史的・技術的な必然性がある．同様に，数学の定義も定義たらしめている必然性がある．そこで，もとの定義を少し外したような定義を想像すると，もとのものがよくできていることに気づく．

例えば前の線形空間の定義で，K はなぜ体でなければならないのかと疑ってみよう．体の一歩手前に**環**という概念があり，整数全体がこれにあたる．整数は割り算すると答が有理数になるので割り算について閉じないが，和と積で閉じ，引き算も可能である．そこで K が整数環だとし，V が

(整数，整数)

で表されるベクトルの集合だとしてみよう．その場合でも $\mathbf{0} = (0, 0)$ となり，(1)〜(8) も成り立つ．一見，定義として不都合なことは何もない．

ところが，線形独立な 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (2, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2)$ の線形結合で $\boldsymbol{c} = (1, 1)$ を表すなら

$$\boldsymbol{c} = \frac{1}{3}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$

とする他ない．すると右辺で整数でないスカラー倍を許してしまっている．つまり K が整数環だと右辺が V で閉じた演算にならない．K が体であってほしいのは，このような理由からである．

次に，「和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ が定義され」というくだりに注目しよう．2 次元数ベクトルに対して天与のごとく成分どうしの和が和であるとしてきたが，「和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ が定義され」なので改めて定義して構わない．そこで，$\boldsymbol{r_0} = (1, 1)$ とし，ベクトルの和が

$$\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{r_0}$$

だったらどうであろうか．今までの和と区別するため便宜上 $\oplus$ と書くことにし，それを上式によって成分どうしの和 $+$ で定義した．スカラー倍は今まで通り λ 倍するなら各成分を λ 倍するものだとしておく．そして線形空間の定義の中の，$(\lambda + \mu)$ 以外の $+$ をすべて $\oplus$ に置き換える．これほどの大変更に対して，意外とうまくいっている．例えば (2) は

$$(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \oplus (\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{r_0}$$

で成り立ち，(3) の

$$\boldsymbol{a} \oplus \mathbf{0} = \boldsymbol{a} + \mathbf{0} + \boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{a}$$

となるような $\mathbf{0}$ は $\mathbf{0} = -\boldsymbol{r_0} = (-1, -1)$ であることもわかる．このようにして (1)〜(4), (7), (8) は成り立つ．しかし

$$\lambda\boldsymbol{a} \oplus \mu\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}_0 \neq (\lambda + \mu)\boldsymbol{a}$$

なので，(5) が成り立たず，同様にして (6) も成り立たない．結局，$\boldsymbol{r}_0 = (0, 0)$ の場合のみすべてがうまくいく．そもそも $\oplus$ が和であるような線形空間があったとしても，あまり使い物にならないであろう．(1)〜(8) はルールとして過剰に思えるが，そのような使い物にならない例を排除するために巧妙に仕組まれている．

■ 7. 一を聞いて ∞ を知る ■

今までは数ベクトルを例にとって線形空間を説明してきた．ところが，それ以外にもたくさん線形空間が存在する．例えば x についての n 次多項式の全体 P_n（$n - 1$ 次以下の多項式も含む）は線形空間になる．P_2 の元は 2 次多項式そのものなので

$$\boldsymbol{a} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

などと表され，和やスカラー倍は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2, \\ \lambda\boldsymbol{a} &= \lambda(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \\ &= \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2\end{aligned}$$

となる．P_2 が線形空間の定義を満たしていることは一つ一つ確かめればすぐにわかる．P_2 の元を指定するには係数の組 (a_0, a_1, a_2) さえ指定すればよく，その情報だけメモることにして，上の和やスカラー倍を考えると，数ベクトル (a_0, a_1, a_2) と同じ法則に従っている．すなわち，線形空間としての多項式と数ベクトルは同一視できるのである．

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \overset{\text{同一視}}{\Longleftrightarrow} (a_0, a_1, a_2).$$

また，n 次多項式の和，スカラー倍の結果も n 次多項式であるので，P_0, P_1, P_2 は P_2 の部分空間である．さらに，2 次多項式全体は

$$a_0(1 + 0x + 0x^2) + a_1(0 + 1x + 0x^2) \\ + a_2(0 + 0x + 1x^2)$$

と表せるので，例えば $1, x, x^2$ が基底となる．

このように数ベクトルで成り立つ概念や定理がすべて多項式でも成り立つ．線形空間の定義で数ベクトルの表記が一切現れない理由がここにある．逆に線形空間であると認められたものについては，数ベクトルで成り立つ公式をそのまま転用できる．

同様に，2 次正方行列全体や $0 \leq x \leq 1$ で定義された連続な関数の全体なども，それらに自然に用いる和やスカラー倍によって線形空間になる．しかしこれら線形空間を与えただけでは器を用意しただけであり，せいぜい次元や部分空間を知るだけである．真に面白くなるのは，**内積**や**線形写像**というベクトルに対する操作を定めてからである．個々の線形空間に対してそれら操作を具体的に定義すると，一を聞いて ∞ を知る線形空間のありがたみがわかるであろう．関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の定積分

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

が内積に見え，$f(x)$ の微分

$$\frac{d}{dx}f(x)$$

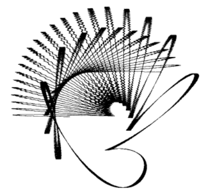
が線形写像に見えれば一人前である．それらについては，以降の記事，あるいは参考文献 3〜6) を参照してほしい．

参考文献

1) 共通商品コード用バーコードシンボル，日本工業規格，JIS X 0501–1985.
2) プログラム言語 C#, 日本工業規格, JIS X 3015:2005.
3) 齋藤正彦,『線型代数入門』, 東京大学出版会, 1966 年.
4) 寺田文行,『線形代数 増訂版』, サイエンス社, 1987 年.
5) 佐武一郎,『線型代数学』，裳華房，1958 年.
6) 高橋大輔,『理工基礎 線形代数』, サイエンス社, 2000 年.

（たかはし・だいすけ，早稲田大学理工学術院）

固有値問題とは何か



桂　利行

「自然という書物は数学の言葉で書かれている．」——ガリレオ・ガリレイは約400年前，数学が自然科学の基礎であることを優美にこう表現した．その後，万有引力の法則が見出され，天体の運動などの自然界の現象がニュートンの運動方程式によって記述されることがわかった．この単純な原理によって古典力学が世界を記述するかに思われたが，20世紀になって素粒子レベルの研究が進むにつれ，古典力学が万能ではないことが判明し，量子力学の世界が展開されていく．この世界においては，力学系に対応してヒルベルト空間が存在し，力学系の状態が状態ベクトルに，物理量がエルミート作用素に，観測値がその固有値に対応する．固有値は，このように実体のあるものとして捉えられる概念である．数学においては，固有値は，行列の理論の他，偏微分方程式論，積分方程式論など様々な領域に登場する．数理工学の世界では，固有値は安定性の理論などで重要な役割を演じている．本稿では，線形代数の理論の威力の一つとして，固有値とはどのようなものなのか，その本質を平易に解説し，典型的な応用例を与えよう．以下，簡単のため複素数体 $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間で考察する．

1. 固有値と固有ベクトル

E を n 次単位行列，つまり対角線上がすべて1で，その他の成分がすべて0である行列とする．λ を複素数とし，スカラー行列 λE を考えれば任意の n 項縦ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，

$$(\lambda E)\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

が成立する．つまりスカラー行列の任意のベクトルへの作用は，ベクトルを定数倍するだけで極めて簡明である．A が n 次正方行列の場合は，ベクトルに作用させると一般には定数倍にはならないが（図1），ベクトルをうまく選ぶとそうなる場合がある．そこで，行列 A に対し n 項縦ベクトル $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ と複素数 λ があって

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

となるとき，λ を A の**固有値**，$\boldsymbol{x}$ を A の**固有ベクトル**と言う．固有値と固有ベクトルを求める問題を**固有値問題**と言う．

例として2次正方行列

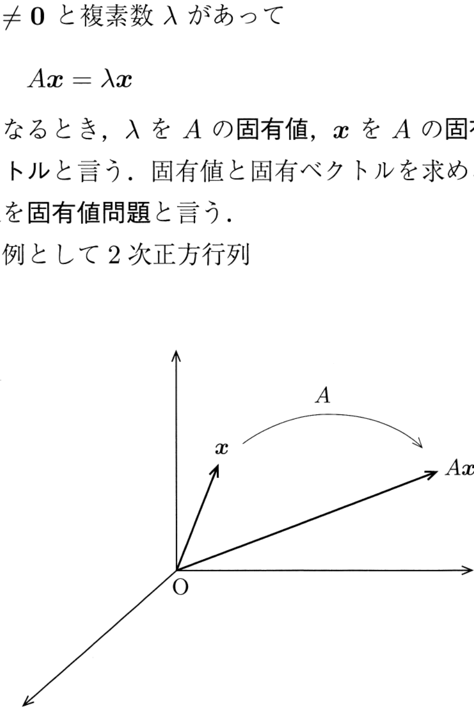


図1　行列 A による線形変換．

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を考えよう．このとき，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$T\boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{e}_1, \quad T\boldsymbol{e}_2 = 3\boldsymbol{e}_2$$

となるから，$2, 3$ は T の固有値で，対応する固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ となる．これ以外に固有値がないことは，x_1, x_2, λ を変数とする連立方程式

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

の解を調べてみればよい．実際，$(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ とすれば，λ は 2 か 3 しかあり得ない．

A が一般の n 次正方行列の場合に戻ろう．固有値を求めるためには変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ と λ を導入し

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とおくとき，連立方程式

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

で，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ となるような解のある λ を決定しなければならない．つまり，移項して

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ が存在するような λ を求める問題となる．もし，$\lambda E - A$ が正則ならば，その逆行列が存在し $\boldsymbol{x}$ は零ベクトルになってしまうから，$\lambda E - A$ が正則でないことが λ が固有値になるための条件ということになる．そこで，変数 t を導入し，行列式

$$f_A(t) = | tE - A |$$

とおき，$f_A(t)$ を A の**固有多項式**または**特性多項式**と言う．このとき，$f_A(t) = 0$ の解が固有値ということになる．行列式の展開を考えれば，$f_A(t)$ は最高次係数が 1 の n 次多項式になることは容易に見て取れよう．したがって，（複素数を成分とする）n 次正方行列には重複を数えて n 個の固有値が存在することとなる．λ を一つの固有値とすれば，連立方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を考えて，$\lambda E - A$ が正則でないことから，少なくとも一つは

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

となるベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在することがわかる．つまり，$f_A(t) = 0$ の各解に対し少なくとも一つは固有ベクトルがとれるのである．

ここで，

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを計算しよう．固有値は固有多項式

$$f_A(t) = | tE - A | = (t-2)(t-3) = 0$$

の解として $2, 3$ である．固有値 2 に対応する固有ベクトルを求めるために，連立方程式

$$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$$

を解いて，$x_1 = 2x_2$ となる．よって一般解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり，固有値 2 に対応する固有ベクトルとして

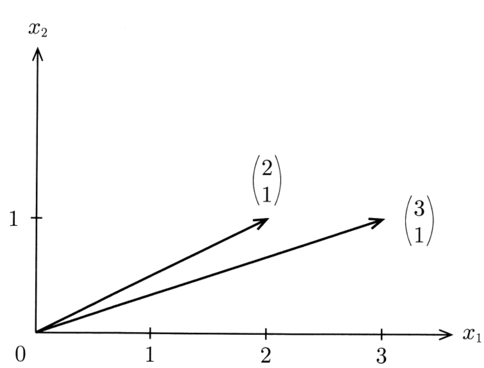


図 2　行列 $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有ベクトル．

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．同様にして，固有値 3 に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる（図 2）．

2. 行列の標準化との関係

対角行列は扱いやすい．対角行列に限定すれば，積の計算は容易であるし，ベキ乗の計算も容易である．そこで，どのような行列も対角行列に変換して扱えれば便利であろう．一般にはそのようにうまい話は存在しないが，できるだけ扱いやすい形に変換して扱おうという発想から標準形の理論が生まれる．ここでは，最も理解しやすい場合を説明しよう．

n 次正方行列 A の固有多項式 $f_A(t)$ が重根を持たないと仮定する．このとき，$f_A(t)=0$ の解 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ はすべて異なる．各 λ_i に対応する固有ベクトルは少なくとも一つ存在するから，その一つを $\boldsymbol{x}_i$ とする．このとき，容易に示せるように n 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は複素数体 $\mathbf{C}$ 上線形独立であり，したがって数ベクトル空間 $\mathbf{C}^n$ の基底となる．基底をなすこれらのベクトルを並べて n 次正方行列 P を作ってみよう：

$$P = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n).$$

このとき，固有値と固有ベクトルの定義から

$$\begin{aligned} AP &= (A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \cdots, A\boldsymbol{x}_n) \\ &= (\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \lambda_2\boldsymbol{x}_2, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{x}_n) = PT \end{aligned}$$

となる．ただし，T は対角線上の各 (i,i) 成分が λ_i の対角行列である．また，基底の性質から P は正則行列となり，したがって

$$P^{-1}AP = T, \text{ あるいは } A = PTP^{-1}$$

となって，正則行列 P によって A は対角化できるのである．これを用いれば行列のベキ乗も簡単に計算できる．すなわち，$A^m = (PTP^{-1})^m = PT^mP^{-1}$ となるが，T は対角行列なので，T^m は (i,i) 成分が λ_i^m の対角行列である．

以上は固有多項式 $f_A(t)=0$ が重根を持たないという仮定の下に対角化の原理を説明した．しかし一般には $f_A(t)=0$ が重根を持つこともある．その場合には上記のような行列の対角化ができるとは限らないが，ジョルダン細胞という対角行列にかなり近い行列を用いてジョルダン標準形にすることができる．

第 1 節で調べた行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の対角化を例として計算しておこう．固有値は 2, 3 で，対応する固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ であった．そこで

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，逆行列は

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，A の対角化

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = T \end{aligned}$$

を得る．また，$A = PTP^{-1}$ を利用して A のベキ乗

$$\begin{aligned} A^m &= (PTP^{-1})^m = PT^mP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2^{m+1}+3^{m+1} & 3\cdot 2^{m+1}-2\cdot 3^{m+1} \\ -2^m+3^m & 3\cdot 2^m - 2\cdot 3^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る．

3. 数列を解く

数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

を満たすとする．このように，a_n の間に一次関係式があるような数列は線形代数を用いて解析することができる．

$$\boldsymbol{b}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

とおけば，$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ であることを用いて

$$\boldsymbol{b}_{n+1} = A\boldsymbol{b}_n$$

となる．ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この行列 A は第1節で調べた行列であり，その対角化の問題を第2節で解いた．そこでの記号を用いて

$$\boldsymbol{b}_{n+1} = PTP^{-1}\boldsymbol{b}_n$$

より，$\boldsymbol{c}_n = P^{-1}\boldsymbol{b}_n$ とおけば，漸化式として

$$\boldsymbol{c}_{n+1} = T\boldsymbol{c}_n$$

を得る．$\boldsymbol{c}_n$ の第1成分を α_n，第2成分を β_n とすれば，この式から

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n, \quad \beta_{n+1} = 3\beta_n$$

となり，それぞれ等比数列である．よって，$\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$ を任意定数として，それらの数列の一般解は

$$\alpha_n = \alpha 2^{n-1}, \quad \beta_n = \beta 3^{n-1}$$

で与えられる．$\boldsymbol{b}_n = P\boldsymbol{c}_n$ だったから，両辺の第2成分を比べて，もとの数列の一般解

$$a_n = \alpha 2^{n-1} + \beta 3^{n-1}$$

を得る．

4. 微分方程式を解く

関数 $f(t)$ が

$$d^2 f(t)/dt^2 - 5df(t)/dt + 6f(t) = 0$$

を満たすとする．このように，$f(t)$ とその高次微分の間に一次関係式があるような微分方程式は，線形代数を用いて解くことができる．

$$\boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix} df(t)/dt \\ f(t) \end{pmatrix}$$

とおけば，$d^2 f(t)/dt^2 = 5df(t)/dt - 6f(t)$ であることを用いて

$$d\boldsymbol{g}(t)/dt = A\boldsymbol{g}$$

となる．ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．この行列 A は再び第1節で調べた行列であり，対角化の問題は第2節で解いた．そこでの記号を用いて

$$d\boldsymbol{g}(t)/dt = PTP^{-1}\boldsymbol{g}(t)$$

より，$\boldsymbol{h}(t) = P^{-1}\boldsymbol{g}(t)$ とおけば，微分方程式

$$d\boldsymbol{h}(t)/dt = T\boldsymbol{h}(t)$$

を得る．$\boldsymbol{h}(t)$ の第1成分を $h_1(t)$, 第2成分を $h_2(t)$ とすれば，この式は

$$dh_1(t)/dt = 2h_1(t), \quad dh_2(t)/dt = 3h_2(t)$$

という簡単な一階の常微分方程式となり，α, β を任意定数とし一般解は

$$h_1(t) = \alpha \exp(2t), \quad h_2(t) = \beta \exp(3t)$$

となる．$\boldsymbol{g}(t) = P\boldsymbol{h}(t)$ だったから，両辺の第2成分を比べて，もとの微分方程式の一般解

$$f(t) = \alpha \exp(2t) + \beta \exp(3t)$$

を得る．

5. 特殊な行列の固有値

ここでは，よく用いる特別な行列について，その固有値を調べておこう．複素数を成分とする n 次元数ベクトル空間 $\mathbf{C}^n$ の標準内積を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$$

によって定義する．ただし，x_i は $\boldsymbol{x}$ の，y_i は $\boldsymbol{y}$ の第 i 成分であり，バーは複素共役を表す．行列 A の転置行列を ${}^tA$, 複素共役を $\bar{A}$ と書く．このとき，内積は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{y}}$ と表示されるから，

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^t\bar{A}\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．

n 次正方行列 A が $A{}^t\bar{A} = {}^t\bar{A}A = E$ をみたすとき A を**ユニタリ行列**と言う．λ を A の固有値，

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ をその固有ベクトルの一つとすれば，

$$\begin{aligned}\lambda\bar{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) &= (\lambda\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{x})\\ &= (A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},{}^t\bar{A}A\boldsymbol{x})\\ &= (\boldsymbol{x},E\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ より $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \neq 0$ だから

$$|\lambda|^2 = \lambda\bar{\lambda} = 1$$

となる．つまり，ユニタリ行列の固有値は絶対値1の複素数である．

次に，歪エルミート行列を考えよう．n 次正方行列 A は $A = -{}^t\bar{A}$ をみたすとき**歪エルミート行列**であると言う．λ を A の固有値，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ をその固有ベクトルの一つとすれば，

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) &= (\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\\ &= (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},{}^t\bar{A}\boldsymbol{x})\\ &= (\boldsymbol{x},-A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},-\lambda\boldsymbol{x})\\ &= -\bar{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ より $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \neq 0$ だから

$$\lambda = -\bar{\lambda}$$

となる．つまり，歪エルミート行列の固有値は純虚数になる．

最後にエルミート行列を考えよう．n 次正方行列 A は $A = {}^t\bar{A}$ をみたすとき**エルミート行列**であると言う．これは，量子力学に現れる作用素の線形代数版である．λ を A の固有値，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ をその固有ベクトルの一つとすれば，

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) &= (\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\\ &= (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},{}^t\bar{A}\boldsymbol{x})\\ &= (\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{x})\\ &= \bar{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ より $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \neq 0$ だから

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

となる．つまり，エルミート行列の固有値は実数になる．

すでに述べたように，量子力学においては物理量がエルミート作用素に，力学系の観測値がその固有値となる．量子力学など物理に現れる線形作用素は無限次元ベクトル空間に作用することも多く，ここで述べた有限次元線形空間とは状況が少し異なることもあるが，エルミート行列のときと同様にエルミート作用素の固有値は実数となり，現実の事象を反映しているのである．

6. 無限次元ベクトル空間から関数解析へ

これまでは，有限次元ベクトル空間の線形変換（線形作用素）を与える n 次正方行列の固有値について述べてきた．しかし，固有値問題は有限次元の場合ばかりではなく無限次元の場合にも有用である．簡単な例を一つ挙げておこう．

実軸の閉区間 $[0,2\pi]$ 上の無限回連続微分可能な複素数値関数 $f(x)$ で境界条件

$$f(0) = f(2\pi)$$

をみたすようなもの全体の集合を $\mathcal{D}$ とする．$\mathcal{D}$ の2元には関数としての和が定義され，また各元の複素数倍が自然に考えられるから，$\mathcal{D}$ は複素数体 $\mathbf{C}$ 上の線形空間となる．その上の微分作用素

$$d/dx : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は $\mathcal{D}$ の線形変換となる．この線形変換の固有値問題は

$$df(x)/dx = \lambda f(x), \quad f(0) = f(2\pi), \quad (\lambda \in \mathbf{C})$$

という微分方程式を解く問題になる．この微分方程式は簡単に解けて，恒等的に0でない解は

$$f(x) = c\exp(\lambda x), \quad (c\text{ は }0\text{ でない定数})$$

で与えられる．ただし，境界条件から，

$$1 = \exp(2\pi\lambda)$$

をみたすことが必要である．したがって，固有値は

$$\lambda = in, \quad (n\text{ は任意の整数}, i = \sqrt{-1})$$

で与えられる．各 n に対応する固有ベクトルは $\exp(inx)$ となる．この場合，固有ベクトルはしばしば**固有関数**と呼ばれる．これらの固有関数は $\mathbf{C}$ 上線形独立であるので，$\mathcal{D}$ は無限次元となる．ち

なみに，これらの固有関数を用いて $\mathcal{D}$ に属する任意の関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(inx)$$

と展開できることが知られている．係数は

$$a_n = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-inx) dx$$

で与えられる．固有関数による展開を $f(x)$ の**固有関数展開**と言う．この例の場合には固有関数展開は**フーリエ展開**に他ならない．

$\mathcal{D}$ のような関数のなす空間での固有値問題は関数を解析する一つの手法を提供している．無限次元ベクトル空間の考察は，さらに突き詰めれば関数解析という分野へと繋がり，そこには肥沃な世界が広がっている．

最後に参考文献をあげておこう．固有値については，たいていの線形代数の教科書に解説されているが，ここでは次の 4 冊をご紹介しておく．文献 1, 2) は初学者用の大変平易な入門書であり，文献 3) は大学教養課程理系の教科書としての多年にわたるベストセラーである．文献 4) は最近出版された教科書であり，マルコフ連鎖や量子力学への応用にも手短に触れられている．

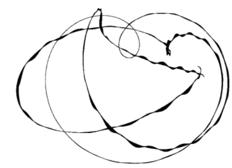
参考文献

1) 志賀浩二著『線形代数 30 講』(朝倉書店，1988 年).
2) 薩摩順吉，四ツ谷晶二共著『キーポイント線形代数』(岩波書店，1992 年).
3) 齋藤正彦著『線型代数入門』(東京大学出版会，1966 年).
4) 中村郁著『線形代数学』(数学書房，2007 年).

(かつら・としゆき，東京大学大学院数理科学研究科)

線形代数と幾何

図形で楽しむ線形代数



砂 田　利 一

1. はじめに

読者諸氏は，既に高校でベクトルと行列を学んでいるはずである．ベクトルを使って幾何学の問題を解くことも経験済みと思う．このベクトルと行列は大学で学ぶ線形代数への出発点であり，現代数学に向かうための最初の一里塚となっている．線形代数の「高級」な話題は他に委ね，本稿では，本特集の「息抜き」として，図形の最大・最小問題を中心に据えて，初等幾何学におけるベクトルと行列の威力を見ることにしよう．

2. 最大・最小問題

とは言いながら，ベクトルと行列とは関係のない，しかも一見して最大・最小問題とも関係があるとは思えない話から始めよう（文献1)参照）．次のような問題を考える．

> 平面に $2n$ 個の点が与えられ，その中から任意に取った3点が同一直線上にはないと仮定する．$2n$ 個の点のうち，半分の n 個は白，残りの n 個には黒の色が与えられている．このとき，これらの点を結ぶ互いに交わらない n 個の線分で，その2つの端点が異なる色を持つようなものが存在することを示せ（図1)．

これは「離散幾何」の問題である．点の数が少なければこのような線分の族を見出すことは容易であるが，一般の場合は簡単ではない．ヒントは，端点が異なる色を持つ n 個の線分について，それらの長さの和を考えることである．n 個の線分の取り方の総数は有限であるから，これを最小にするような線分の取り方が存在する．このような取り方をした線分たちは互いに交わらない．実際，もし交わるとすると，結び方を変えることにより，長さの和をさらに小さくすることができることになって，「最小性」に矛盾する（「三角形の2辺の和は他の1辺より大きい」を使う）（図2)．

強調したいのは，線分の族を求める問題を，最小問題に帰着させて解いたことである．力学の問題を最小問題（変分問題）に直して解くことは，オ

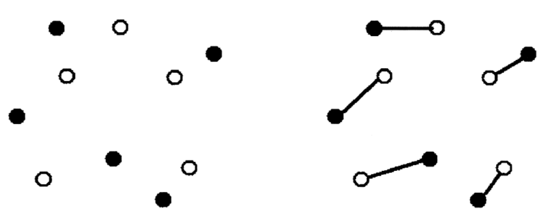


図1　交わらない結び方．

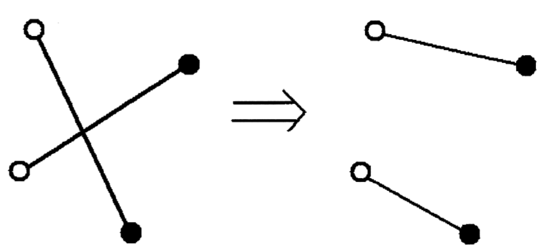


図2　結び方を変える．

イラーの時代からよく使われる手法である．実際，最小（あるいは最大）問題は，数理科学における普遍的位置を占めているのである．

3. 等周不等式

幾何学における最大・最小問題として最も有名なものは，「平面上の長さの与えられた閉じた曲線のうち，それが囲む面積を最大にするのは円周である」という，円を特徴付ける定理である．この定理は「長さを ℓ，面積を S により表すとき，$\ell^2 \geq 4\pi S$ が常に成り立ち，等号は円周の場合に限る」という**等周不等式**に帰着される[*1)]．円は「最も大きい対称性」を持つ平面図形であるから，前節の言い方を借りれば，大きい対称性を持つ図形を求める問題を最大問題に帰着させたことになる．もちろん，円が求める図形であることはあらかじめ知られているのだから，これは問題を大袈裟にしていることになるのだが，求める図形が未知の場合は重要なアイディアを与えているのである（文献3）参照）．

等周不等式の証明は本稿の守備範囲を超えるので，代わりに三角形に対する等周不等式「三角形の周の長さを ℓ，面積を S とするとき，$\ell^2 \geq 12\sqrt{3}S$ が成り立ち，等号は正三角形のときにのみ成り立つ」ことを確かめよう（すなわち，一定の周の長さを持つ三角形の中で面積が最大となるのは正三角形である）．辺の長さを a, b, c とし，$s = (a+b+c)/2 = \ell/2$ とする．ヘロンの公式 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ および相加平均と相乗平均の不等式

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c)\right)^3 = 3^{-3}s^3$$

を使えば，

$$S^2 \leq \frac{1}{3^3}s^4 = \frac{1}{2^4 3^3}\ell^4.$$

等号が成り立つのは，$s-a = s-b = s-c$，すなわち $a = b = c$ のときである．

不等式 $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ を使えば，辺の和に関する等周不等式から，辺の二乗和に関する等周不等式

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 \geq 4\sqrt{3}S \qquad (1)$$

が得られる．等号が成り立つのは正三角形のみであることも直ちに示される．

ここまでは，線形代数はおろか，ベクトルさえ登場しなかった．しかし，不等式 (1) の立体版を考えると，ベクトルと行列の有効性が発揮される．すなわち，「体積が V の四面体 ABCD（図3）に対して，6つの辺（稜）の二乗和に関する不等式

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 + \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 \geq \frac{36}{3^{1/3}}V^{2/3} \qquad (2)$$

が成り立ち，等号は正四面体のときにのみ成り立つ」ことをベクトルと行列を用いて示す．この不等式は，ダイヤモンド結晶の原子構造の対称性に深く関連している[3)]．

空間に原点を選び，A, B, C, D をそれぞれ位置ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ により表す．原点を D に置けば，$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ であるから

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{c}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\|^2 + \|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\|^2 \geq \frac{36}{3^{1/3}}V^{2/3} \qquad (3)$$

を証明すればよい．ここから行列の理論を使う[2)]．

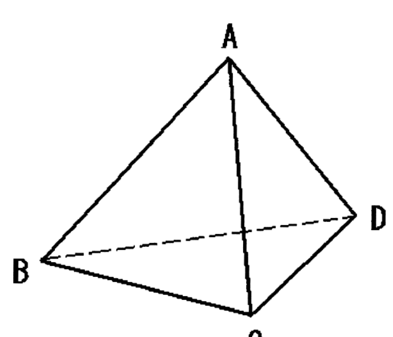


図3　四面体.

*1)　空間の場合は，問題は著しく困難になるが，凸集合を囲む閉じた曲面（卵形面と呼ばれる）に対して，その表面積を S，囲む体積を V とするとき，$S^3 \geq 36\pi V^2$ が成り立ち，等号は球面の場合に限ることが知られている．

一般に，行列 A に対して，${}^tA$ を A の行と列を交換して得られる転置行列，正方行列 A に対して $\mathrm{tr}\ A, \det A$ によりそれぞれ跡と行列式を表す．

A を n 次のを正値対称行列とする（A の固有値がすべて正であるような対称行列を正値対称行列と言う）．このとき

$$\mathrm{tr}\ A \geq n(\det A)^{1/n} \tag{4}$$

が成り立つ．等号は A がスカラー行列（λI_n の形の行列）のときにのみ成り立つ．A が対角行列の場合は，相加平均と相乗平均の不等式そのものである．一般の場合は，適当な直交行列 U（${}^tUU = U{}^tU = I$）を取ることにより，${}^tUAU$ が対角行列になるようにできる．跡と行列式の性質 $\mathrm{tr}\ AB = \mathrm{tr}\ BA$, $\det AB = \det BA$ を用いれば，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\ A &= \mathrm{tr}\ {}^tUAU \\ &\geq n\big(\det {}^tUAU\big)^{1/n} = n\big(\det A\big)^{1/n}\end{aligned}$$

が得られる．等号は，対角行列 ${}^tUAU$ の対角成分がすべて一致するときにのみ成り立つことから，

$$\begin{aligned}{}^tUAU = \lambda I_n &\iff A = ({}^tU)^{-1}\lambda I_n U^{-1} \\ &\iff A = \lambda({}^tU)^{-1}U^{-1} \\ &\qquad = \lambda(U{}^tU)^{-1} = \lambda I_n\end{aligned}$$

となって，確かに主張は正しい．

(3) の証明に入る．

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

と置くと，S は正値対称行列であり，$\det S = 16$ となることが確かめられる．(3) の左辺は，行列の跡を用いて

$$\begin{aligned}&3\|\boldsymbol{a}\|^2+3\|\boldsymbol{b}\|^2+\|\boldsymbol{c}\|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} \\ &= \mathrm{tr}\ S\begin{pmatrix} \|\boldsymbol{a}\|^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \|\boldsymbol{b}\|^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \|\boldsymbol{c}\|^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と表される．$\sqrt{S}$ を，$(\sqrt{S})^2 = S$ を満たす正値対称行列を表すことにする．さらに，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を列ベクトルと考えて $A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ をそれらを並べて作った 3 次の正方行列とすれば，

$${}^tAA = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{a}\|^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \|\boldsymbol{b}\|^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \|\boldsymbol{c}\|^2 \end{pmatrix}$$

となるから，不等式 (4) を用いれば，(3) の左辺は

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\big(S({}^tAA)\big) = \mathrm{tr}\big(\sqrt{S}({}^tAA)\sqrt{S}\big) \\ &\geq 3\big[\det\big(\sqrt{S}({}^tAA)\sqrt{S}\big)\big]^{1/3} \\ &= 3\big[\det\big(S({}^tAA)\big)\big]^{1/3} \\ &= 3(\det S)^{1/3}\big|\det A\big|^{2/3}\end{aligned}$$

のように下から評価される．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の体積が $|\det A|$ であることに注意して，$|\det A| = 6V$ を使えば，

$$\begin{aligned}3(\det S)^{1/3}\big|\det A\big|^{2/3} &= 3\cdot 16^{1/3}6^{2/3}V^{2/3} \\ &= 12\cdot 3^{2/3}V^{2/3} \\ &= \frac{36}{3^{1/3}}V^{2/3}\end{aligned}$$

であるから，求める不等式が得られる．ここで等号は $\sqrt{S}({}^tAA)\sqrt{S} = \lambda I_3$，すなわち，${}^tAA = \lambda S^{-1}$ となる λ が存在するときにのみ成り立つ．この両辺の行列式を取れば $\lambda = 16^{1/3}|\det A|^{2/3}$ が得られる．

$$S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

であることから，等式が成り立つのは，

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{c}\|, \\ &\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|} = \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{c}\|\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるときのみであることが結論される．この条件は，四面体 ABCD が正四面体となることと同値である．

4. 様々な最小問題

大学の入試問題を作成する立場にいる筆者とし

ては，これは秘密にしておきたいことなのだが，最大・最小問題は「作りやすい」入試問題である．得てして「問題のための問題」になりがちな中で，最大・最小問題は幾何学的に意味のある問題となる．ここでは，そのような問題を無作為に選んでみよう．

> 平面上の △ABC と点 P に対して，次のことを示せ．
> **(1)** $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2 \geq \frac{1}{3}(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)$.
> **(2)** 上で等号が成り立つのは，P が △ABC の重心のときのみである．

これは高校の教科書や参考書にある標準的問題であり，ベクトルを使って簡単に証明できる．証明は省略する．次の問題には内心が登場する．

> △ABC において，半径 r の内接円を持つ △ABC と内心 I に対して，
> $$\frac{1}{\mathrm{AI}^2}+\frac{1}{\mathrm{BI}^2}+\frac{1}{\mathrm{CI}^2} \geq \frac{3}{4}r^{-2}$$
> が成り立ち，等号は正三角形のときにのみ成り立つことを示せ（図 4）．

ベクトルを用いて証明するため，$\overrightarrow{\mathrm{IA}}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{IB}}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{IC}}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{ID}}=\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{\mathrm{IE}}=\boldsymbol{y}$, $\overrightarrow{\mathrm{IF}}=\boldsymbol{z}$ とおく．

AI は ∠EIF の二等分線であり，$\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{y}\|$ $(=r)$ であるから $\boldsymbol{a}=s(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ と書ける．FA ⊥ IF であるから，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{z})\cdot\boldsymbol{z}=0$ が得られ，これに $\boldsymbol{a}=s(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ を代入して s を求めれば，

$$\boldsymbol{a}=\frac{r^2}{r^2+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$$

が得られる．全く同様に，

$$\boldsymbol{b}=\frac{r^2}{r^2+\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{c}=\frac{r^2}{r^2+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．これらを用いて $\|\boldsymbol{a}\|^2$, $\|\boldsymbol{b}\|^2$, $\|\boldsymbol{c}\|^2$ を計算すると，

$$\|\boldsymbol{a}\|^2=\frac{2r^4}{r^2+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}},\quad \|\boldsymbol{b}\|^2=\frac{2r^4}{r^2+\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x}},$$
$$\|\boldsymbol{c}\|^2=\frac{2r^4}{r^2+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}$$

となるから，

$$\frac{1}{\mathrm{AI}^2}+\frac{1}{\mathrm{BI}^2}+\frac{1}{\mathrm{CI}^2}=\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|^2}+\frac{1}{\|\boldsymbol{b}\|^2}+\frac{1}{\|\boldsymbol{c}\|^2}$$
$$=\frac{1}{2r^4}(3r^2+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x})$$
$$=\frac{1}{4r^4}(3r^2+\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\|^2)\geq\frac{3}{4}r^{-2}$$

が得られる．等号は，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ のときのみ成り立つが，これは △ABC が正三角形であることと同値である．

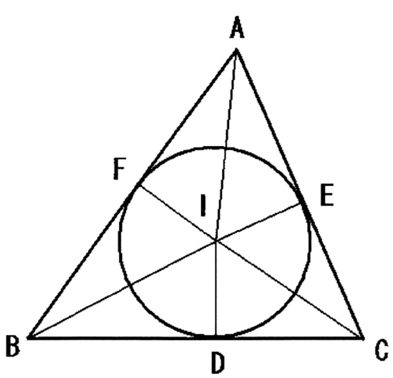


図 4　内心．

> 四面体 $\mathrm{OA_1A_2A_3}$ とその内部の点 P が与えられている．O を始点とし，辺 $\mathrm{OA_1}$, $\mathrm{OA_2}$, $\mathrm{OA_3}$ を延長して得られる半直線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 とする（図 5）．
> **(1)** 次の性質を満たす平面 α_0 が存在することを示せ．
> 「α_0 は ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 と交わり，それらの交点をそれぞれ $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{B_3}$ とすると，P は $\triangle\mathrm{B_1B_2B_3}$ の重心である．」
> **(2)** P を通る平面 α で ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 と交わるものを任意に取り，それらの交点をそれぞれ $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{C_3}$ とする．四面体 $\mathrm{OC_1C_2C_3}$ の体積を V，四面体 $\mathrm{OB_1B_2B_3}$ の体積を V_0 とすると，$V\geq V_0$ であることを示せ．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}=\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,3)$ と置くと，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{p}$ とすると，P は四面体 $\mathrm{OA_1A_2A_3}$ の内部にあるから，

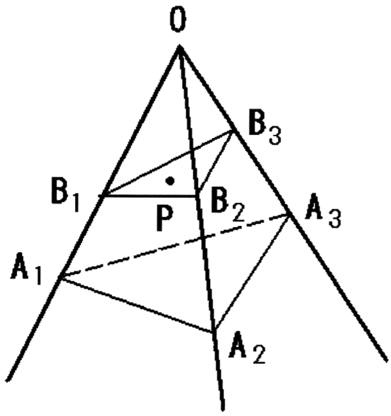


図5　角錐.

$$\boldsymbol{p} = l\boldsymbol{a}_1 + m\boldsymbol{a}_2 + n\boldsymbol{a}_3,$$
$$(l > 0,\ m > 0,\ n > 0,\ l + m + n < 1)$$

と表される．$\overrightarrow{\mathrm{OB}_1} = s\boldsymbol{a}_1$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}_2} = t\boldsymbol{a}_2$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}_3} = u\boldsymbol{a}_3$ と置くと，P が $\triangle\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3$ の重心である条件は

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{3}(s\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_2 + u\boldsymbol{a}_3)$$

であるから，$s = 3l, t = 3m, u = 3n$ とおけば，$\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3$ を通る平面が求めるものである．

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OC}_1} = x\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}_2} = y\overrightarrow{\mathrm{OB}_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}_3} = z\overrightarrow{\mathrm{OB}_3}$ と置くと，$x > 0, y > 0, z > 0$ であり，点 P が $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3$ を通る平面上にあることから，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= e\overrightarrow{\mathrm{OC}_1} + f\overrightarrow{\mathrm{OC}_2} + g\overrightarrow{\mathrm{OC}_3}\\ &= ex\overrightarrow{\mathrm{OB}_1} + fy\overrightarrow{\mathrm{OB}_2} + gz\overrightarrow{\mathrm{OB}_3},\\ e &+ f + g = 1\end{aligned}$$

と表すことができる．一方，P が $\triangle\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3$ の重心であることから，

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OB}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OB}_2} + \overrightarrow{\mathrm{OB}_3})$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}, \overrightarrow{\mathrm{OB}_2}, \overrightarrow{\mathrm{OB}_3}$ の1次独立性から，$ex = fy = gz = 1/3$ が得られる．よって $e + f + g = 1$ を書き直せば

$$\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big) = 1$$

となり，

$$\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big) \geq \Big(\frac{1}{xyz}\Big)^{1/3}$$

から，$xyz \geq 1$ が得られる．ところで，四面体 $\mathrm{OC}_1\mathrm{C}_2\mathrm{C}_3$ の体積 V は，頂点 C_3 から平面 $\mathrm{OC}_1\mathrm{C}_2$ に下ろした垂線の足を H とするとき，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot\mathrm{C}_3\mathrm{H}\cdot(\triangle\mathrm{OC}_1\mathrm{C}_2\text{の面積})\\ &= \frac{1}{3}\cdot\mathrm{C}_3\mathrm{H}\cdot xy(\triangle\mathrm{OB}_1\mathrm{B}_2\text{の面積})\\ &= xyzV_0\end{aligned}$$

となって，求める不等式が得られる．

最後に難問を与えておく (答えは参考文献3) の「はじめに」の文章にある website をご覧頂きたい).

平面上の $\triangle\mathrm{ABC}$ に対して，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ を最小にする点 P は，次のように特徴付けられることを示せ.

(1) $\angle\mathrm{A}, \angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{C}$ がすべて 120 度より小さい場合は，

$$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BPC} = \angle\mathrm{CPA} = 120^\circ \left(= \frac{2\pi}{3}\right)$$

となる点 P が存在し，この点が最小値を与える．

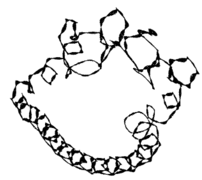
(2) 1つの内角が 120 度以上の場合，例えば $\angle\mathrm{A}$ が 120 度以上の場合，$\mathrm{P} = \mathrm{A}$ が最小値を与える．

参考文献

1) S. Weinberger, *Computers, Rigidity, and Moduli*, Princeton University Press, 2005.
2) 砂田利一,『行列と行列式』, 岩波書店, 2003 年.
3) 砂田利一,『ダイヤモンドはなぜ美しい？』, シュプリンガー・ジャパン, 2006 年.

(すなだ・としかず，明治大学理工学部)

線形代数から表現論へ



平井　武

1. はじめに ― 表現論とは ―

線形代数といえば，まず行列やベクトルを思い出すだろう．この伝で言ったとして，表現論といえばまず何を思い出すのだろうか．この質問の答は案外難しい．なぜなら答は時と共に変わって来たからである．4, 50年前であれば，答は「有限群の表現の理論」である．この理論は，フロベニウス（F.G. Frobenius, 1849–1917）が1896年に**指標**の理論を開始し[2)]，翌年に**線形表現**の理論を始めた[3)]．1904年にはシュア（J. Schur, 1875–1941）が**射影表現**の研究を始めた[9)]．以来，それは有限群の研究にとっては必須のものであり続けている．これに少し遅れて「多元環の表現論」もあった．

30年ほど前からは徐々に，(形容詞句を付けないで) 単に表現論と言ったときに想起するのは，リー群などのユニタリ表現の理論 $\Longrightarrow$ (ユニタリとは限らない) 無限次元表現の理論 $\Longrightarrow$ 岩堀–ヘッケ環，カッツ–ムーディ環などの代数系の表現の理論も含む，と変わって来た．現在では，数学的な対象にはそれぞれそれに付随する表現の理論があり，それらは適当な形容詞句を付けて，何々の表現論，と呼ばれる．

タイトル「線形代数から表現論へ」を掲げたこの特集記事では，まず，実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の多元環として，複素数体 $\boldsymbol{C}$ や4元数体 $\boldsymbol{H}$ の2次の正方行列による表現を易しく解説する．また3次元回転の4元数を用いた表示，$SO(3)$ の普遍被覆群の $\boldsymbol{H}$ を用いた実現，を述べる．

ついで有限群の表現論の一般論を少し紹介する．

そのあと，紙数の許す限り，有限群の代表として置換群をとりその線形表現と射影表現の易しい部分につき，また，リー群の代表として3次元回転群 $SO(3)$ をとりその線形表現につき，また $SO(3)$ の射影表現と4元数体 $\boldsymbol{H}$ との深い関係につき，など解説したいが……

この記事の延長線上には成書5) などがある．詳しい文献や勉強の手引きはそちらを参照のこと．

注 1. 可換体 K 上の多元環 $\mathcal{A}$ とは，(i) K 上のベクトル空間であって，(ii) 双線形な積 $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (a, b) \to ab \in \mathcal{A}$ が結合律を満たすもの．

2. 複素数，4元数を2次の行列で表現する

体 K を実数体 $\boldsymbol{R}$ または複素数体 $\boldsymbol{C}$ とする．K の元を要素とする2次の正方行列の全体を $M(2, K)$ とかく．そこでの演算は，和，積，スカラー倍，の3種類ある．これにより $M(2, K)$ は K 上4次元の多元環となる．とくに $K = \boldsymbol{C}$ のときには，係数体を $\boldsymbol{R}$ に制限することにより，$M(2, \boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{R}$ 上の多元環（次元は2倍）にもなる．

2.1 複素数を表現する実2次正方行列

複素数体 $\boldsymbol{C}$ を実数体 $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間と思えば2次元であり，その基底として1と虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ がとれる．ところで虚数という術語はウソの数という意味に誤解されるのであまりよろ

しくない．ずっと昔のことだが，私が教わった高校の数学の先生が誰かの講演を聴いてきて「虚数を使って実際にいろいろの数値計算が出来るらしい」と如何にも感極まったというふうに話してくれたことを懐かしく思い出す．

ここでは，虚数は実数と同じ程度に存在を主張している，ということを示そう．そのために $\boldsymbol{C}$ を実 2 次行列の全体 $M(2,\boldsymbol{R})$ の中に埋め込んで見せる．別の言い方をすると，「$\boldsymbol{R}$ 上の多元環 $\boldsymbol{C}$ の忠実な 2 次元線形表現を与える」．それには，$1, i \in \boldsymbol{C}$ に対して，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2,\boldsymbol{R})$$

を対応させる．したがって一般に，

$$\boldsymbol{C} \ni \alpha+\beta i \longrightarrow \alpha E+\beta I = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in M(2,\boldsymbol{R}).$$

> **問題 2.1.1.** 上の対応を Φ とおく：$z=\alpha+\beta i$ に対し，$\Phi(z)=\alpha E+\beta I$. $\Phi : \boldsymbol{C} \hookrightarrow M(2,\boldsymbol{R})$ は，和を和に写し，積を積に写す，すなわち，
>
> $$\Phi(z+z') = \Phi(z)+\Phi(z'),$$
> $$\Phi(zz') = \Phi(z)\Phi(z') \quad (z, z' \in \boldsymbol{C}).$$
>
> これを示せ．また，$\Phi(z^{-1}) = \Phi(z)^{-1}$, $\det \Phi(z) = |z|^2$, を示せ．

注 2. 実数 $\boldsymbol{R}$ の理論的存在は $M(2,\boldsymbol{R})$ の存在を保証し，表現 Φ を介して，複素数 $\boldsymbol{C}$ の存在を保証する．

長さ 1 の複素数は $w_\theta = \cos\theta + \sin\theta\, i$ の形に表され（$|w_\theta|=1$），w_θ に対応するのは回転行列

$$\Phi(w_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (1)$$

である．一般に，複素数 $z=x+yi$ で 2 次元平面の点 (x,y) を表すと，w_θ の掛け算 $z \to z' = w_\theta z$ は原点を中心とする角 θ の反時計回りの回転を表している．

2.2 4 元数を表現する複素 2 次正方行列

4 元数（quaternion（コータニオン））$q = \alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \boldsymbol{R})$ の全体のなす非可換な体（**斜体**という）が 4 元数体 $\boldsymbol{H}$ である．$\alpha=0$ の q を純 4 元数とよぶ．純 4 元数の全体を $\boldsymbol{H}_-$ と書く．i, j, k はハミルトン（W.R. Hamilton,1805–65）が見つけた虚数単位で，

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j,$$

を満たす $\boldsymbol{H}$ の $\boldsymbol{R}$ 上の基底である．1843 年 10 月 16 日にハミルトンが散歩途上で発見し，翌日の日付で詳細な報告を手紙で友人 J.T. Graves に書き送った．そのコピーが 1844 年に公刊されている．全集で丁度印刷 4 頁分 149 行の長いものである[4]．

4 元数体 $\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{R}$ 上の多元環だが，$M(2,\boldsymbol{C})$ に埋め込める．その写像 Ψ は，対応

$$i \to I, \; j \to J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; k \to K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

を $\boldsymbol{R}$ 上線形に拡張したものであり，和を和に，積を積に写す．すなわち，$q, q' \in \boldsymbol{H}$ に対し

$$\begin{cases} \Psi(q+q') = \Psi(q)+\Psi(q'), \\ \Psi(qq') = \Psi(q)\Psi(q'). \end{cases} \qquad (2)$$

$q = \alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ の共役 4 元数を

$$\overline{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$$

とおき，q のノルムを

$$\|q\| = \sqrt{q\overline{q}} = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)^{1/2}$$

とおくと，$q^{-1} = \|q\|^{-2}\overline{q}$.

> **問題 2.2.1.** 行列の 3 ッ組 $\{I, J, K\}$ は 3 ッ組 $\{i, j, k\}$ と同様の関係式を満たすことを示せ．

> **問題 2.2.2.** 公式 (2) を証明せよ．また，
>
> $$\det \Psi(q) = \|q\|^2, \quad \overline{qq'} = \overline{q}\,\overline{q'}$$
>
> を示せ．

3. 4 元数による 3 次元回転の表示

ハミルトンはその後，4 元数の応用などを追求していたが，そのテーマの 1 つに 3 次元ユークリッド空間 E^3 の回転を記述する問題があった．これは 2.1 節で説明したように（絶対値 1 の）複素数の掛け算により平面の回転が記述できたので，それと類似のことを狙（ねら）ったのである．

彼は純 4 元数 $\boldsymbol{x} = x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \boldsymbol{H}_-$ で

E^3 の次の点を表した：

$$x = {}^t(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

x は縦ベクトル，スペースを節約するため以後横ベクトルの転置で表す

ベクトル x の長さは

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

であるから $\|\boldsymbol{x}\| = \|x\|$. この等長同型を記号で $\boldsymbol{H}_- \cong E^3$ と書けば端的で印象的である（ハミルトンの時代にはなかった記号の威力）. E^3 の原点を固定する回転は，3 次の直交行列 $U = (u_{ij}) = (u_{ij})_{i,j=1}^3 \in SO(3)$ で $x \to x' = Ux$ と表される【文献 5), 7 章参照】. ここに，

$$SO(3) = \{U \in M(3, \boldsymbol{R}); U\,{}^tU = {}^tUU = E_3 \\ (\text{単位行列}), \det U = 1\}.$$

ハミルトンはノルム 1 の 4 元数の全体 $\boldsymbol{H}_1 = \{a \in \boldsymbol{H}; \|a\| = 1\}$ をとり，$a \in \boldsymbol{H}_1$ による掛け算 $\boldsymbol{x} \to a\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}_-$) により，原点を固定する回転の $x \in E^3$ への作用を表そうとした. $\boldsymbol{H}_1$ は積により群になるので，現代風に言うと

「このやり方で群 $\boldsymbol{H}_1$ から 3 次元回転群 $SO(3)$ への同型が与えられる筈」

と見込んだわけである. しかし結果から言うと，これは大きな見込み違いというかボタンの掛け違いだった. 40 歳前に 4 元数を発見した彼は何冊も本を書いてその普及に努めたのだが，このボタンの掛け違いが一生つきまとったようである. Altmann による評論[1]には，この点について The sad truth とか entirely unacceptable とか Optical illusion とか causing endless damage とか，やや感情的な用語を使いながら詳述してある.

問題 3.1. $a = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \in \boldsymbol{H}_1$ を $a = \cos\theta + \sin\theta\,\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_-, \|\boldsymbol{w}\| = 1$ (i.e. $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{H}_1$) と書き表す. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}_-$ に対して，$a\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}_-$ となるためには，E^3 で $x \perp w$（直交）が必要十分であることを示せ. その場合 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = a\boldsymbol{x}$ から来る E^3 での変換 $x \to x'$ はどんな変換か.

さて，では 4 元数による正しい回転群記述は何だったのか. その答は実質的にはハミルトンに先んじて Rodrigues[8] によって 1840 年に与えられていたのだが歴史的には無視されてきた.

問題 3.2. $a \in \boldsymbol{H}_1$ に対して次を示せ：

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}_- \implies \boldsymbol{x}' = a\boldsymbol{x}a^{-1} = a\boldsymbol{x}\bar{a} \in \boldsymbol{H}_-.$$

$a \in \boldsymbol{H}_1$ を問題 3.1 のように，$a = \cos\theta + \sin\theta\,\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{H}_1$, と表し，$\boldsymbol{H}_1$ 上の変換

$$R(a):\ \boldsymbol{H}_1 \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = a\boldsymbol{x}a^{-1} \in \boldsymbol{H}_1 \quad (3)$$

を考え，これを E^3 上の変換 $E^3 \ni x \to x' \in E^3$ に翻訳したものを 3×3 行列 $R'(a)$ を使って $x' = R'(a)x$ と表す. $\|x'\| = \|x\|\ (\forall x \in E^3)$ だから，$A = R'(a)$ は直交行列（i.e. ${}^tA\,A = E_3$）である【文献 5), 7.3 参照】. 故に

$$\det({}^tA\,A) = \det(A)^2 = \det E_3 = 1,$$
$$\therefore\quad \det A = \det R'(a) = \pm 1.$$

他方，a が連続的に 1 につながっているから（∵ $\boldsymbol{H}_1$ は 3 次元球面 S^3 と同相）$R'(a)$ は単位行列 $R'(1) = E_3$ に連続的に繋（つな）がり $\det R'(a) = \det R'(1) = 1$，よって，$R'(a) \in SO(3)$. また，

$$R'(a)R'(a') = R'(aa') \quad (a, a' \in \boldsymbol{H}_1)$$

だから，$\boldsymbol{H}_1 \ni a \to R'(a) \in SO(3)$ は準同型である（次節の用語に従えば，R' は群 $\boldsymbol{H}_1$ の 3 次元線形表現である）. $R(a)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}$ だから $R'(a)w = w$. 従って，$R'(a)$ は w を固定するので回転軸 w の周りの回転であるが，実は角度 2θ の右ねじ回転であることが次の問題を解けば分かる.

問題 3.3. $a = \cos\theta + \sin\theta\,\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{H}_1$, とする. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{H}_1$ を $u, v, w \in E^3$ が右手系の直交座標ベクトル系となるようにとると，

$$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{vw} = \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{wu} = \boldsymbol{v},$$
$$\begin{cases} R(a)\boldsymbol{u} = \cos(2\theta)\boldsymbol{u} + \sin(2\theta)\boldsymbol{v}, \\ R(a)\boldsymbol{v} = -\sin(2\theta)\boldsymbol{u} + \cos(2\theta)\boldsymbol{v}. \end{cases}$$

基底 $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ に関する $R(a)$ の行列表示は，

$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ヒント．$\boldsymbol{u} = {}^t(u_1, u_2, u_3)$ などと座標をかくと，

$$\text{行列式} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 1.$$

問題 3.4. $q \in \boldsymbol{H}$ に対し，収束する級数により

$$\exp q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} = 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \cdots \quad (4)$$

とおくと，$\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{H}_1$ に対し，

$$\exp(\theta \boldsymbol{w}) = \cos\theta + \sin\theta\, \boldsymbol{w} \quad (\theta \in \boldsymbol{R}).$$

ヒント．$\boldsymbol{w}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^2 = -1$.

上述の回転の表示での重要ポイントは，$a = \exp(\theta\boldsymbol{w}) \to R'(a) = R'\big(\exp(\theta\boldsymbol{w})\big)$ では $\theta \to 2\theta$ と角度が 2 倍になっていることである．これは，$a = \exp(\theta\boldsymbol{w})$ と $-a = \exp\big((\theta+\pi)\boldsymbol{w}\big)$ とが同じ直交行列 $R'(a) = R'(-a)$ を与えることに照応し，準同型 R' が 2:1 の対応（核は $\{\pm 1\}$）であることを意味する．ハミルトンは開拓者一流の頑固さでもってあくまでも $\theta \to \theta$ の対応を得ることに拘（こだわ）ったようである．

伝記の類によると，ハミルトンはやがて過剰なアルコール摂取に苦しむようになった．Altmann はその一因としてこの回転表示問題でのシリアスな悩みを挙げる．その悩みの原因を現代から見れば，① 作用するもの（operators）と② 作用されるもの（operands）がいずれも同じ 4 元数であったからそれらが混同されたのが原因である．

読者諸君はこの小文を読んでもハミルトンの悩みがしっくり来ないかも知れないが，それは 1 つには諸君が受けた現代の数学的基礎訓練，2 つには著者（平井）が①のためには a（italic 体）②のためには $\boldsymbol{x}$（boldsymbol）とするなど慎重に記号を選んで読者のために引いておいた伏線，のせいであり読者の理解は無意識のうちに正しい方向へと誘導されているのである．

いずれにせよ我々は次の重要な結果を得た．

定理 3.5. 群 $\boldsymbol{H}_1$ は 3 次元球面と同相で単連結であり，準同型 $R' : \boldsymbol{H}_1 \to SO(3)$ は被覆写像を与える．従って，$\boldsymbol{H}_1$ は回転群 $SO(3)$ の普遍被覆群である．

説明： 3 次元空間 E^3 の原点を止める任意の回転 ρ には必ず回転軸があることが別途示されている．回転軸を $w, \|w\| = 1$，軸の周りの右ねじ回転の角度を ϕ，とすると，$a = \exp\left(\frac{1}{2}\phi\boldsymbol{w}\right) \in \boldsymbol{H}_1$ とおけば，$R'(a) = \rho$. ただし，$\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_- \cap \boldsymbol{H}_1$ は $w \in E^3$ に対応．これにより一般の 3 次元回転 ρ を $\phi\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_-$ でパラメーター表示し，$\rho = \rho(\phi\boldsymbol{w})$ と書く．これはいわゆる Euler 角による表示【文献 5), 7.6 節参照】のようにパラメーターに切れ目がない．

さらに 2 つの回転の積 $\rho(\phi\boldsymbol{w})\rho(\phi'\boldsymbol{w}') = \rho(\phi''\boldsymbol{w}'')$ において，$\phi''\boldsymbol{w}''$ をもとの $\phi\boldsymbol{w}, \phi'\boldsymbol{w}'$ で書くには

$$\big(\cos(\tfrac{1}{2}\phi) + \sin(\tfrac{1}{2}\phi)\boldsymbol{w}\big)\big(\cos(\tfrac{1}{2}\phi') + \sin(\tfrac{1}{2}\phi')\boldsymbol{w}'\big) = \cos(\tfrac{1}{2}\phi'') + \sin(\tfrac{1}{2}\phi'')\boldsymbol{w}''$$

を 4 元数 $\boldsymbol{H}$ における演算通りに書き下せばよい．それが **Rodrigues の公式**[8)]である．

4. 群の表現とは

群 G の表現とは，G から別の群 M への準同型である．これは G の基本構造である積（product）のいろいろな表し方を模索して構造を調べようとしている，と解釈できる．従って，G をより分かりやすい群で表現するのが普通である．例えば M がそれぞれ置換群，行列のなす群，であるときには，G の置換表現，行列表現という．

さらに線形表現を定義する．

定義 4.1. V を体 K 上のベクトル空間とし，各 $g \in G$ に V 上の可逆な線形変換 $T(g)$ が対応し，

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2) \quad (g_1, g_2 \in G) \quad (5)$$

を満たすとき T を G の体 K 上の**線形表現**と呼び，(T, V) とも書き表す．$\dim V$ を表現 T の次元という．

これは群 M として V 上の可逆な線形変換全体のなす群をとった場合に他ならない．

定義 4.2. $(T_1,V_1),(T_2,V_2)$ を G の 2 つの線形表現とする．$V_1\to V_2$ の同型写像（可逆な線形写像）A があって，

$$AT_1(g)A^{-1}=T_2(g)\quad(g\in G)$$

が成り立つとき，T_1,T_2 は**同値**であるという．（行列表現に対しても同様の定義をする．）

線形表現 (T,V) で V を有限次元とする．基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_d\}, d=\dim V$ をとれば $T(g)$ は

$$T(g)\boldsymbol{e}_j=\sum\nolimits_{i=1}^{d}t_{ij}(g)\boldsymbol{e}_i\quad(1\le j\le n)\ (6)$$

と $d\times d$ 行列 $\big(t_{ij}(g)\big)$ で表示されるので，行列表現が得られる．基底の取り方を変えれば対応する行列表現は同値ではあるが違った姿形に見える．

定義 4.3. (T,V) を G の線形表現とする．V の部分空間 V' が

$$T(g)\boldsymbol{v}'\in V'\quad(g\in G,\boldsymbol{v}'\in V')$$

となっているとき，V' を**不変**という．不変部分空間 V' 上に $T(g)$ を制限した作用素を $T'(g)=T(G)|_{V'}$ とすると，$g\to T'(g)\ (g\in G)$ はまた G の表現となる．これを T の**部分表現**という．

定義 4.4. 不変部分空間が自明なもの（V と $\{\boldsymbol{0}\}$）以外に無いとき，T を**既約**という．そうでないとき**可約**という．

定義 4.5. T を G の線形表現とし，$\dim V<\infty$ とする．G 上の関数

$$G\ni g\to \mathrm{tr}\big(T(g)\big)=\textstyle\sum_{i=1}^{d}t_{ii}(g)$$

を表現 T の**指標**と呼び，$\chi_T(g)$ と書く．

指標 χ_T は G の内部自己同型で不変，すなわち，

$$\chi(aga^{-1})=\chi_T(g)\quad(a,g\in G)$$

であり，表現 T を特徴づける重要なものである．

定理 4.6. G の 2 つの表現 T_1,T_2 が同値ならば，$\chi_{T_1}=\chi_{T_2}$ である．

実際，V の 2 つの線形変換 A_1,A_2 について $\mathrm{tr}(A_1A_2)=\mathrm{tr}(A_2A_1)$ である（証明せよ）から，

$$\chi_{T_2}(g)=\mathrm{tr}\big(T_2(g)\big)=\mathrm{tr}(AT_1(g)A^{-1})$$
$$=\mathrm{tr}(T_1(g)A^{-1}A)=\mathrm{tr}\big(T_1(g)\big)=\chi_{T_1}(g).$$

なお，群の表現に関するさらに詳しい紹介については文献 5) の第 I 巻を参照されたい．

5. 有限群の置換表現，線形表現

5.1 有限群の n 次対称群 $\mathcal{S}_n$ への埋め込み

n 文字の集合 $\Omega_n=\{1,2,\cdots,n\}$ の置換の全体を $\mathcal{S}_n$ とかけば，積

$$(\sigma\tau)(i):=\sigma\big(\tau(i)\big)\quad(i\in\Omega_n,\sigma,\tau\in\mathcal{S}_n)\ (7)$$

により群になる．これを n 次**対称群**という．

任意の有限群 G をとる．その位数を n とし群の元に $g_1=e$（単位元），$g_2,g_3,\cdots,g_n$ と番号を付ける．これは集合としての G と $\Omega_n=\{1,2,\cdots,n\}$ との間に全単射（1-1, onto）の対応を付けたことに当たる．$g\in G$ は G 上に左移動 $L_g: G\ni h\to gh\in G$ として働く．これを G の元の番号付けを使って Ω_n 上の置換として表してみよう．

$i\in\Omega_n$ に対し，g_i が g によって $gg_i=g_{i'}$ と動かされているとき，$\sigma(i)=i'$ とおけば置換 $\sigma\in\mathcal{S}_n$ を得る．σ は g によって決まるので σ_g と書く．

$$(gg')h=g(g'h)\ (h\in G),\ \text{i.e. } L_{gg'}=L_gL_{g'}$$

を反映して，

$$\sigma_{gg'}=\sigma_g\sigma_{g'}\quad(g,g'\in G).$$

また，$g\ne e$ に対しては $\sigma_g\ne\boldsymbol{1}$（恒等置換）であるから $\sigma_g\ne\sigma_{g'}\ (g\ne g')$．故に対応

$$\varphi:\ G\ni g\to\sigma_g\in\mathcal{S}_n$$

は中への同型写像である．これは群 G の自然で忠実な置換表現である．

定理 5.1.1. 任意の有限群はある対称群 $\mathcal{S}_n$ の中に埋め込まれ，$\mathcal{S}_n$ のある部分群と同型である．

$\sigma\to T(\sigma)$ を $\mathcal{S}_n$ の線形表現とすれば，これと埋め込み φ とを繋いだ $g\to T'(g):=T\big(\varphi(g)\big)$ は G の線形表現となる．

5.2 有限群の正則表現

有限群 G をとる．G 上の複素数値関数全体を $\boldsymbol{C}[G]$ と書く．$f_1, f_2, f \in \boldsymbol{C}[G], \lambda \in \boldsymbol{C}$ に対し

和: $(f_1+f_2)(g) := f_1(g)+f_2(g)$,

スカラー倍: $(\lambda f)(g) := \lambda f(g)\ (g \in G)$,

と定義して $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間になる．G 上の左移動 L_g は関数 f の載(の)っている土台 G を動かすので f を別の関数に写す．それにより

$$\big(\mathcal{L}(g)f\big)(h) := f(g^{-1}h) = f\big(L_g^{-1}h\big) \quad (h \in G)$$

として，関数空間 $\boldsymbol{C}[G]$ 上の線形変換 $\mathcal{L}(g)$ を得る．

$$\begin{cases} \mathcal{L}(e) = I \ (\text{恒等作用素}), \\ \mathcal{L}(gg') = \mathcal{L}(g)\mathcal{L}(g') \quad (g, g' \in G), \end{cases} \tag{8}$$

により，$\mathcal{L}$ が $\boldsymbol{C}[G]$ を表現空間とする G の表現であることが分かる．これを G の（左）正則表現という．これは可約だが非常に重要な表現である．

問題 5.2.1. 公式 (8) を証明せよ．

次の事実は正則表現の重要性の 1 面である．

定理 5.2.2. 有限群 G の任意の既約表現 T は正則表現 $\mathcal{L}$ のある部分表現に同値である．T が $\mathcal{L}$ に含まれる重複度は $\dim T$ である．

群 G の 1 次元の表現は写像 $\chi : G \ni g \to \chi(g) \in \boldsymbol{C}^{\times} := \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ で，$\chi(gg') = \chi(g)\chi(g')\ (g, g' \in G)$ となるものであり，これを G の（1 次元）指標と呼ぶ．

6. n 次対称群 $\mathcal{S}_n$ の線形表現

$\mathcal{S}_n$ には 1 次元指標が χ_0, χ_1 の 2 つある：

$$\chi_0(\sigma) = 1, \quad \chi_1(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma) \quad (\sigma \in \mathcal{S}_n),$$

ここに $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の符号を表す．

他方，正則表現の次元は $d = n!$ であり，これを既約表現に分解すれば全ての既約表現が現れることは定理 5.2.2 が保証するところだが，$n!$ も既約表現の個数も n と共に急激に増大し，この既約分解は一筋縄ではいかない難物である．従って，各既約表現 T の構成やその指標 χ_T の計算は別途いろいろ工夫を要する．

まずフロベニウスは 1900 年に既約指標の分類をして，それにより既約表現を分類して見せた．しかし特別な場合を除いて彼の結果は原理的なものであり，その後大勢の人の努力で多くの成果が得られている．さらに現在では $n \to \infty$ のときの漸近的な挙動を確率論的に捉える話も盛んである．

ここでは例として $\mathcal{S}_n$ の自然表現を取り扱ってみよう．$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を基底とする複素ベクトル空間 V において，$\sigma \in \mathcal{S}_n$ の作用 $S(\sigma)$ を

$$S(\sigma)\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_{\sigma(j)} \quad (j \in \Omega_n), \tag{9}$$

とおくと，$S(\tau)S(\sigma) = S(\tau\sigma)\ (\tau, \sigma \in \mathcal{S}_n)$ となり，$\sigma \to S(\sigma)$ は線形表現である．実際，

$$S(\tau)S(\sigma)\boldsymbol{e}_j = S(\tau)\boldsymbol{e}_{\sigma(j)} = \boldsymbol{e}_{\tau(\sigma(j))}$$
$$= \boldsymbol{e}_{(\tau\sigma)(j)} = S(\tau\sigma)\boldsymbol{e}_j.$$

この表現は自然表現と呼ばれ，上記の基底に関する $S(\sigma)$ の表現行列 $S'(\sigma)$ は σ に対する**置換行列**と呼ばれる．

問題 6.1. 置換行列 $S'(\sigma)$ はその (i,j)-要素が，$i = \sigma(j)$ のときに 1, $i \neq \sigma(j)$ のときに 0, となる $n \times n$ 行列である．

自然表現 S の指標は $\chi_S(\sigma) = \mathrm{tr}\big(S'(\sigma)\big)$ であるから，問題 6.1 を使えば次が得られる．

定理 6.2. 自然表現 S の指標 χ_S は，

$$\chi_S(\sigma) = \sharp\{j \in \Omega_n; \sigma(j) = j\}.$$

ここに，集合 A の位数を $\sharp A$ と書く．

V には $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{e}_n$ で張られる 1 次元の不変部分空間 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{f}$ があり，そこで働く部分表現は 1 次元指標 χ_0 である．

$\boldsymbol{e}_j$ たちが互いに直交し長さ 1 であるように内積を入れると，$\boldsymbol{f}$ の直交補空間 $V' = \{\boldsymbol{f}\}^{\perp}$ は不変部分空間である．実はこれは既約である．よって，

定理 6.3. 自然表現 (S, V) は直和として $V = \boldsymbol{C}\boldsymbol{f} \oplus V'$ と既約分解される．

7. 将来に向かって

本記事のタイトル「線形代数から表現論へ」はなかなかに大きなテーマであり「初心者向けに易しく」を心がけ，かつ数頁にまとめることは至難の業(わざ)である．多くのことを書き残しているが，ここに来てほぼ紙数も尽きてきたので不親切ながら要点を列挙することでお許し願いたい．

◆ n 次対称群 $\mathcal{S}_n$ の射影表現． $\mathcal{S}_n$ の射影表現の話は面白く重要であるがあまり書かれたものがないので簡略だが触れておく．シュアは 1911 年に対称群 $\mathcal{S}_n$ の既約な射影表現をすべて決めた[10]．

彼は，線形変換による表現の代わりに，射影変換による表現を考えたのである．ここでいう射影変換とは分数変換

$$x={}^t(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to x'={}^t(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n),$$

$$x'_i=\frac{a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+\cdots+a_{i,n}x_n+a_{i,n+1}}{a_{n+1,1}x_1+a_{n+1,2}x_2+\cdots+a_{n+1,n}x_n+a_{n+1,n+1}}$$

のことである．これは突き詰めていけば，（1 価ではない）多価の線形表現を考えていることとなる．シュアは 2.2 節における 2 次の行列 I,J,K などを用いて具体的に $\mathcal{S}_n$ の射影表現を構成した．

◆ 3 次元回転群 $SO(3)$ の線形表現． これについては標準的なテキストが各種ある．

◆ 回転群 $SO(3)$ の射影表現について． W. Pauli が 1924 年に電子がスピンという物理量を持つことを示したが，それは電子の波動関数が $SO(3)$ のスピン表現（2 価）による変換を受けることを意味する．よって $SO(3)$ の普遍被覆群 $\boldsymbol{H}_1$（これは $SU(2)$ と同型である）の（1 価の）線形表現が現れる．スピン角運動量を記述するために導入されたいわゆるパウリ行列は 2.2 節に現れた I,J,K と次の関係にある：

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=-iJ,\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=iI,$$

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-iK,\quad (i=\sqrt{-1}).$$

この話の続きは例えば文献 5), 23 章や 文献 6), 4 章を見られたい．

◆ n 次元回転群 $SO(n)$ の射影表現． $n\geq 4$ のときも $SO(n)$ の射影表現は 2 価の表現になるが，それが自然に現れてくる不可避のものであるということはかなり早くから分かっており，Murnaghan[7], 10 章「回転群のスピン表現」と Weyl[11], VII 章「指標」とは違った導入の仕方をしている．

◆ 回転群 $SO(n)$ の普遍被覆群 $Spin(n)$． $SO(n)$ のスピン表現（2 価）を 1 価の表現にもどす普遍被覆群 $Spin(n)$（スピノル群）は Clifford 代数を用いて与えるのがもっとも分かり易い．それは定理 3.5 で $Spin(3)$ をノルム 1 の 4 元数の群 $\boldsymbol{H}_1$ として与えた方法の拡張である．

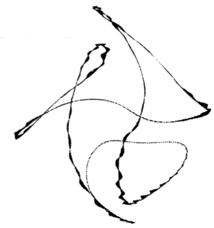
◆ 表現論と量子物理学． さらに進んで，ローレンツ群の無限次元ユニタリ表現やスピン表現，あるいは量子物理学と表現論との関係などについての入門書としては文献 6) を挙げておく．

参考文献

1) S.L. Altmann, Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal, *Mathematics Magazine*, **62** (1989), 291–308.
2) F.G. Frobenius, Über Gruppencharaktere, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 985–1021 (1896).
3) F.G. Frobenius, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, *ibid.*, 944–1015 (1897).
4) W.R. Hamilton, On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. (A letter to John T. Graves, dated 17 October 1843), *Philosophical Magazine*, **25** (1844), 489–495.
5) 平井 武,『線形代数と群の表現 I, II』, すうがくぶっくす **20, 21**, 朝倉書店, 2005.
6) 平井武・山下博共著,『表現論入門セミナー——具体例から最先端にむかって—』, 遊星社, 第 2 版, 2007.
7) F.D. Murnaghan, *The theory of group representations* (first published by the Johns Hopkins Press in 1938), Dover, 2005.
8) O. Rodrigues, *J. Math. Pures et Appl.*, **5** (1840), 380–440.
9) J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. für die reine und angewante Mathematik*, **127** (1904), 20–50.
10) J. Schur, *ibid.*, **139** (1911), 155–255.
11) H. Weyl, *Classical Groups: Their Invariants and Representations* (first published in 1939), Princeton University Press.

（ひらい・たけし，京都大学名誉教授）

線形代数と微分方程式



真島　秀行

1. はじめに—個人的な耳の手術の体験から

昨年末に内耳にある腫瘍をできるだけ小さくし今後大きくならないように手術をした．内耳であるから普通なら外からは見えないし，耳の周辺を切って内部に触れられるようにしないと何もできないように思うかもしれない．しかし，実際には，皮膚を切ることもなく，検査も手術も現代の医療機器を用いて行われた．これらの機器では電磁波が使われ，その波の「重ね合わせ」による効果が発揮されている．その基本的な原理こそが線形性である（図 1）．

この小論では，線形常微分方程式，線形偏微分方程式である熱伝導方程式や波動方程式の解を求めるのに線形性がいかに有効に働いているかを主に解説する（図 2）．その際に使われるラプラス変換，フーリエ級数やフーリエ変換についても手短に書くことにする．筆者の内耳の腫瘍の発見はフーリエ変換という数学の原理がなければなし得なかったことである．

2. 定数係数単独１階線形常微分方程式の解法

初めに，次の未知関数 u について１次の，すなわち，**線形**の微分方程式を考えよう．ここで，a は（複素数でもよいが）実数であるとしておこう．

$$\frac{du}{dt} = au.$$

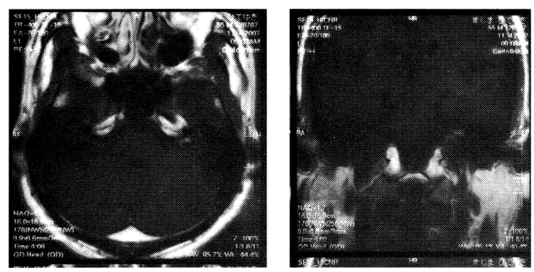


図１　頭部の断面図．

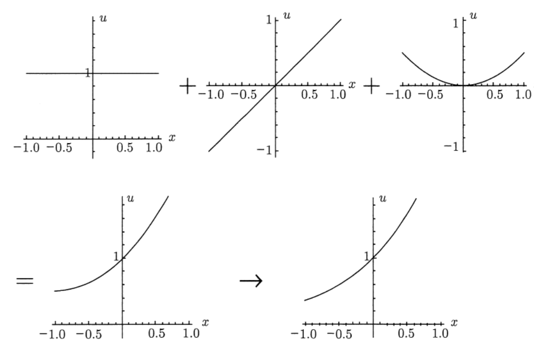


図２　単項式の表す関数のグラフを重ね合わせると指数関数のグラフに近づいていく．

このような微分方程式は，原子崩壊の過程のように（変化の速さが全体量に比例するような）時間に依存する現象を表す際に現れる．微分演算は**線形的**である，すなわち，微分可能な関数 f, g と実数 λ, μ に対して，

$$\frac{d(\lambda f + \mu g)}{dt} = \lambda \frac{df}{dt} + \mu \frac{dg}{dt}$$

が成立している．したがって，

$$\frac{d}{dt}\frac{du}{dt} = \frac{d(au)}{dt} = a\frac{du}{dt} = a^2 u$$

と計算でき，次々に同様の計算をすると，任意の自然数 h に対して，

$$\frac{d^h u}{dt^h} = a^h u$$

が成り立つ．$u(0)=1$ と与えられていれば，

$$\frac{1}{h!}\left.\frac{d^h u}{dt^h}\right|_{t=0} = \frac{1}{h!}a^h u(0) = \frac{1}{h!}a^h$$

であり，これを t^h の係数として**線形結合**を考え，

$$\sum_{h=0}^{N}\frac{1}{h!}\left.\frac{d^h u}{dt^h}\right|_{t=0} t^h = \sum_{h=0}^{N}\frac{1}{h!}a^h t^h,$$

これを微分すると，

$$\frac{d}{dt}\sum_{h=0}^{N}\frac{a^h}{h!}t^h = \sum_{h=0}^{N}\frac{a^h}{h!}\frac{d}{dt}t^h = \sum_{h=0}^{N}\frac{a^h}{h!}ht^{h-1}$$

$$= \sum_{h=1}^{N}\frac{a^h}{(h-1)!}t^{h-1} = a\sum_{h=1}^{N}\frac{a^{h-1}}{(h-1)!}t^{h-1}$$

が成り立つ．N を無限大に近づけた極限をとることにより，形式的に無限級数 $\sum_{h=0}^{\infty}\frac{a^h}{h!}t^h$ が微分方程式の初期値問題

$$\frac{du}{dt} = au, \quad u(0)=1$$

の解であることが分かる．この無限級数の収束半径は無限大で任意の実数（あるいは複素数）に対して収束し，実数上の関数を表すことは厳密に証明することができ，それは指数関数 e^{at} の $t=0$ におけるテイラー展開に他ならない．ここで，$\mathrm{e} = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!} = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ は自然対数の底を表す．上の議論はまた解 u が $u(t) = \mathrm{e}^{at}u(0)$ と表されることも示していることに注意されたい．

3. 定数係数連立線形 1 階常微分方程式系の解法

以上のような考えは，定数係数の連立線形常微分方程式系

$$\frac{du_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}u_k, \quad (j=1,\cdots,n)$$

にも適用できるが，ベクトル $\boldsymbol{u} = {}^t(u_k)_{k=1,\cdots,n}$ と行列 $A=(a_{jk})_{j,k=1,\cdots,n}$ を使って上の微分方程式を表現し直して

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = A\boldsymbol{u}$$

と表せば見通しがよい．行列 A に関する指数関数を

$$\exp At = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}A^h t^h$$

と定められることが検証できる．もう少し詳しく言えば，左辺の行列の無限級数が収束することを証明でき，行列値の関数が定められ，それを行列 A に関する指数関数と呼び，$\exp At$ で表すと，上記の連立線形常微分方程式系の解の基本行列になる．すなわち，どんなベクトル値関数の解 $\boldsymbol{u}$ も

$$\exp At = (\boldsymbol{u}_1(t),\cdots,\boldsymbol{u}_n(t))$$

と表しておけば，ベクトル $\boldsymbol{u}(0) = {}^t(c_k)_{k=1,\cdots,n}$ を用いて

$$\boldsymbol{u}(t) = (\exp At)\boldsymbol{u}(0) = \sum_{k=1}^{n} c_k\boldsymbol{u}_k(t),$$

と線形結合で表されることになる．なお，$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ は**線形独立系**であり，線形常微分方程式系の解の全体の集合

$$\left\{\boldsymbol{u}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n \;\middle|\; \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = A\boldsymbol{u}\right\}$$

のなす自然な和とスカラー倍に関する（有限次元）**線形空間**の**基底**になっていることになる．というのは，行列の指数関数については限定的な指数法則が成立して，B と C が交換可能（$BC=CB$）な正方行列であるとき，

$$\exp B\exp C = \exp(B+C)$$

が成り立ち，特に，$(\exp At)(\exp(-At)) = I$（単位行列）で，$\exp At$ に逆行列 $\exp(-At)$ があり，

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\boldsymbol{u}_k = \exp At\,{}^t(\lambda_k)_{k=1,\cdots,n} = \mathbf{0}$$

とすれば，逆行列をかけて ${}^t(\lambda_j)_{j=1,\cdots,n} = \mathbf{0}$ が分かる．すなわち，$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ が線形独立であることが分かる．

$\exp At$ を具体的に計算するには行列 A の**ジョルダン標準形**や**スペクトル分解**を用いる．

n 次正方行列 A が n 次可逆行列 P により，ジョルダン標準形 J になるとすれば，すなわち，$AP = PJ$, $A = PJP^{-1}$, $J = D + N$ $(DN = ND)$ とすれば，

$$\begin{aligned}\exp At &= \exp(PJP^{-1})t = P(\exp Jt)P^{-1} \\ &= P(\exp Dt)(\exp Nt)P^{-1}\end{aligned}$$

となり，特に n 次正方行列 J が一つの**ジョルダン細胞**型のジョルダン標準形になっているとき，すなわち，

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

であるとき，行列の指数関数は以下のように計算される．

$$\exp Jt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda t} \times$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{n-4}}{(n-4)!} & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

また，n 次正方行列 A に対して，その固有多項式が，

$$\Phi_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

と素因数分解されるとき，

$$\frac{1}{\Phi_T(\lambda)} = \frac{h_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{h_r(\lambda)}{(\lambda - \lambda_r)^{m_r}}$$

と部分分数分解し，各 $j = 1, \cdots, r$ に対して，行列 $P_1, \cdots, P_r$ を

$$P_j = h_j(A) \prod_{k \neq j} (A - \lambda_k I)^{m_k}$$

と定めれば，

$$I = P_1 + \cdots + P_j + \cdots + P_r,$$

$$P_j P_k = \begin{cases} 0 & (j \neq k), \\ P_j & (j = k) \end{cases}$$

をみたし，

$$\begin{aligned}\exp At &= \exp At \times I = \exp At(P_1 + \cdots + P_r) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \exp \lambda_j t \sum_{k=0}^{m_j - 1} \frac{(A - \lambda_j I)^k t^k}{k!} P_j\end{aligned}$$

と計算される．

4．定数係数単独高階線形常微分方程式の解法

連立系で例えば，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の形のとき，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} s(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$$

を考えると，すなわち，

$$\frac{ds(t)}{dt} = c(t), \quad \frac{dc(t)}{dt} = -s(t)$$

だから，$s(t), c(t)$ はいずれも，

$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} + w(t) = 0$$

という単独未知関数 w の 2 階線形常微分方程式をみたす．逆に，単独 n 階線形常微分方程式

$$\frac{d^n}{dt^n} w + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} w + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} w + a_n w = 0$$

は未知関数を増やして，

$$u_1 = w, \quad u_2 = w^{(1)}, \ \cdots, \ u_n = w^{(n-1)}$$

とおきベクトル $\boldsymbol{u} = {}^t(u_1, \cdots, u_n)$ に関する線形常微分方程式系に帰着できる．このことにより，この方程式の実数上の解の全体の集合 S は自然な和，スカラー倍について実 n 次元線形空間をなすことが確かめられる．解の基本系 $< w_1, \cdots, w_n >$ と

は S の基底のことと定める．この節の初めの例では，直接，計算して，cos, sin のテイラー展開を利用すると

$$\exp At = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

であることがわかり，この2階の微分方程式の解の基本系は，$< \cos t, \sin t >$ となる．このように，連立系を経由して，それらを求めることもできるが，微分演算の線形性を利用して，直接的に計算することもできる．それを以下に示す．

定数係数単独 n 階線形常微分方程式

$$\frac{d^n w}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} w}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dw}{dt} + a_n w = 0$$

を考える．これに対して，

$$\phi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

とおく．

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

と素因数分解されているものとする．このとき，関数 $\mathrm{e}^{\lambda t}$ に対して，

$$\frac{d^n \mathrm{e}^{\lambda t}}{dt^n} + \cdots + a_{n-1}\frac{d\mathrm{e}^{\lambda t}}{dt} + a_n \mathrm{e}^{\lambda t} = \phi(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

という等式が成り立つことから，$\phi(\lambda) = 0$ の解 $\lambda_j (j = 1, \cdots, r)$ に対して，$\mathrm{e}^{\lambda_j t}$ は微分方程式の解であることが分かる．さらに，$m_j > 1$ ならば，上の等式を λ について偏微分して（偏微分の順序交換をして）得られる等式

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{\partial \mathrm{e}^{\lambda t}}{\partial \lambda} + a_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\frac{\partial \mathrm{e}^{\lambda t}}{\partial \lambda} + \cdots + a_n \frac{\partial \mathrm{e}^{\lambda t}}{\partial \lambda}$$
$$= \phi(\lambda)\frac{\partial \mathrm{e}^{\lambda t}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

から，

$$\left.\frac{\partial \mathrm{e}^{\lambda t}}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_j} = t\mathrm{e}^{\lambda_j t}$$

も解であることがわかる．同様にして，

$$t^k \mathrm{e}^{\lambda_j t}, \quad (j = 1, \cdots, r, \quad k = 0, \cdots, m_j - 1)$$

が解であることがわかる．これらの $n(= m_1 + \cdots + m_r)$ 個の解は線形独立系であることを（例えば，ファンデルモンドの行列式あるいはその変形を用いて）示すことができ，解の基本系をなすことがわかる．

一般に，n 個の関数 $w_1, \cdots, w_n$ に対して，

$$W(w_1, \cdots, w_n)(x)$$
$$= \det(w_j^{(i)}(x))_{i=0,\cdots,n-1,\, j=1,\cdots,n}$$

をロンスキアン（ロンスキー行列式）と言うが，例えば，$r = n, m_1 = \cdots = m_n = 1$ の場合，上の解の系のロンスキアンを計算すると，ファンデルモンドの行列式が出てきて，

$$\mathrm{e}^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t} \prod_{1 \le k < j \le n} (\lambda_k - \lambda_j) \neq 0$$

であり，一般的な場合は，その変形で，

$$(-1)^{n-r}\mathrm{e}^{(m_1\lambda_1 + \cdots + m_r\lambda_n)t} \prod_{s=1}^{r}(m_s - 1)!$$
$$\times \prod_{1 \le k < j \le r} (\lambda_k - \lambda_j)^{m_k m_j} \neq 0$$

となる．

なお，単独未知関数 w の2階線形常微分方程式

$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} + w(t) = 0$$

に対しては，$\phi(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda + i)$（$i$ は虚数単位）となることから解の基本系として $< \mathrm{e}^{it}, \mathrm{e}^{-it} >$ を選ぶこともでき，前に示した解の基本系との間に**線形関係**があり次の式が成り立つ．

$$\mathrm{e}^{it} = \cos t + i\sin t, \quad \mathrm{e}^{-it} = \cos t - i\sin t,$$
$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}.$$

これはオイラーの関係式に他ならない．

5. ラプラス変換による解法

実数上で定義された関数 w が良い性質をもっていて，次の積分によって変数 s の関数が定まるものとしよう．

$$L(w)(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ts} w(t)dt.$$

これを関数 w のラプラス変換と言う．例えば，

$n=0,1,2,\cdots$ として,

$$\int_0^\infty e^{-ts}t^n dt = \frac{n!}{s^{n+1}},$$
$$\int_0^\infty e^{-ts}e^{\lambda t} dt = \frac{1}{s-\lambda}, \quad (s>\lambda),$$
$$\int_0^\infty e^{-ts}e^{\lambda t}t^n dt = \frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}$$

となる．部分積分を用いて計算すると,

$$\int_0^\infty e^{-ts}\frac{d}{dt}w(t)dt = sL(w)(s)-w(0),$$
$$\int_0^\infty e^{-ts}\frac{d^2}{dt^2}w(t)dt$$
$$= s^2L(w)(s)-sw(0)-w^{(1)}(0)$$

という関係式が得られ，例えば,

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2}-w(t)=0$$

の両辺にラプラス変換を適用すると，積分の**線形性**から,

$$s^2L(w)(s)-sw(0)-w^{(1)}(0)-L(w)(s)=0$$

と計算できて,

$$(s^2-1)L(w)(s)=sw(0)+w^{(1)}(0)$$

より $L(w)(s)$ が求められる．$w(0)=1, w^{(1)}(0)=1$ とすれば，$(s-1)L(w)(s)=1$ となり，上の例で $\lambda=1$ の場合になるから，$w(t)=e^t$ がこのような w の一つの関数であることがわかる．実は，2 つの連続関数のラプラス変換が同じならばそれらは一致するという定理があるので，今の場合は $w(t)=e^t$ が求める（一意）解である．

$w(0)=2, w^{(1)}(0)=0$ とすれば，$(s-1)(s+1)L(w)(s)=2s$ となり，部分分数分解もして,

$$L(w)(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}$$

だから，$w(t)=e^t+e^{-t}$ がわかる．

このようにして定数係数の単独高階線形常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d^n}{dt^n}w+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}w+\cdots+a_nw=f(x),$$
$$w(0)=c_0,\, w^{(1)}(0)=c_1,\cdots,w^{(n-1)}(0)=c_{n-1}$$

も f が $e^{\lambda t}t^n$ のような多項式あるいは指数関数との積でラプラス変換が計算できる関数とすれば，部分分数分解等を用いる代数的な問題に帰着して解くことができる．

6. 線形常微分方程式の一般論

行列，ベクトルの記法を用いて，線形常微分方程式系は

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt}=A(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{b}(t)$$

と表される．ここで，$A,\boldsymbol{b}$ は実数の区間 I で連続な関数を成分とする n 次行列，n ベクトルであるとする．$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ のとき同次（あるいは斉次）であると言い，そうでないとき非同次（あるいは非斉次）であると言う．$t_0\in I, \boldsymbol{u}_0\in\mathbf{R}^n$ に対して，線形常微分方程式系の初期値問題は

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt}=A(t)\boldsymbol{u}(t)+b(t), \quad \boldsymbol{u}(t_0)=\boldsymbol{u}_0$$

をみたす解 $\boldsymbol{u}$ を求める問題となる．具体的な解の形は分からなくても**線形性**のおかげで以下のようなことが成立することが知られている．

定理． 区間 I で連続な関数を係数とする線形常微分方程式の初期値問題の解は I **全体を存在域として一意に存在**する．

そこで I 上で定義された同次線形常微分方程式系の解の全体の集合を S とおく．

定理． S には，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in S, c\in\mathbf{R}$ に対して

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})(t)=\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t), \quad (c\boldsymbol{u})(t)=c\boldsymbol{u}(t)$$

という自然な和，実数倍が定められ，それについて実 n 次元**線形空間**をなす．

したがって，S の n 個の元からなる系 $<\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n>$ が線形独立系であるとき，S の生成系であることも分かる．それらを並べて得られる行列 $U=(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n)$ を解の基本行列あるいは基本解行列と呼ぶ．n 次可逆行列 C に対して UC も基本解行列になり，そのようなものに限られる．

非同次線形常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = A(t)\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{b}(t), \quad \boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}_0$$

の解は，これに随伴する同次線形微分方程式系

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt} = A(t)\boldsymbol{u}(t)$$

の解の基本行列の一つを $U(t)$ とするとき，

$$\boldsymbol{v}(t) = U(t)U(t_0)^{-1}\boldsymbol{v}_0 + U(t)\int_{t_0}^{t} U(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)ds$$

で与えられる．

7. 波動方程式，熱伝導方程式の解法

両端が固定された弦の振動の様子は波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,\, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,\, x)$$

の条件

$$u(t,\, -\pi) = u(t,\, \pi) = 0,$$
$$u(0,\, x) = f(x), \quad (x \in [-\pi,\, \pi])$$
$$u_t(0,\, x) = g(x) \quad (x \in [-\pi,\, \pi])$$

の下での解 $u(t,x)$ で表される．解を変数分離形（$u(t,\, x) = w(t)v(x)$）で解こうとすると，$\frac{d^2}{dx^2}v/v = \frac{d^2}{dt^2}w/w$ は定数でなければならず，それを $-l$ とおけば，v は，常微分方程式の境界値問題

$$\frac{d^2}{dx^2}v + lv = 0, \quad v(-\pi) = v(\pi) = 0$$

の解になる．第4節で見たように，$\exp(\sqrt{-l}x)$ と $\exp(-\sqrt{-l}x)$ の線形結合になり，境界条件を満たすことを考慮すると，$l = \frac{\nu^2}{4}$（νは整数）でなくてはならず，そのとき，$v(x) = \sin\nu x, \cos\frac{2\nu+1}{2}x$ が解になる．一方，w も

$$\frac{d^2}{dt^2}w + \nu^2 w = 0,$$

という微分方程式をみたすから，α_ν, β_ν を定数として，

$$w(t) = \alpha_\nu \cos\nu t + \beta_\nu \sin\nu t,$$

とならなくてはならず，変数分離形の解としては，

$$u_\nu(t,x) = (\alpha_\nu \cos\nu t + \beta_\nu \sin\nu t)\sin\nu x + (\gamma_\nu \cos\nu t + \delta_\nu \sin\nu t)\cos\frac{2\nu+1}{2}x$$

となる．$u(0,x) = f(x), u_t(0,x) = g(x)$ という条件から，

$$f(x) = \alpha_\nu \sin\nu x + \gamma_\nu \cos\frac{2\nu+1}{2}x,$$
$$g(x) = \beta_\nu \sin\nu x + \delta_\nu \cos\frac{2\nu+1}{2}x$$

を満たさなくてはならないが，一つの ν に対するこの形の解だけでは，不可能なことは明らかである．そこで，ν に関する無限和，（無限個の波の）重ね合わせを考えるのである．つまり，正弦関数と余弦関数の無限の線形結合

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\alpha_\nu \sin\nu x + \gamma_\nu \cos\frac{2\nu+1}{2}x\right),$$
$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\beta_\nu \sin\nu x + \delta_\nu \cos\frac{2\nu+1}{2}x\right)$$

とならないか，と考えるのである．ここで，関数 f, g が区分的に微分可能であり，境界条件 $f(-\pi) = f(\pi) = 0, g(-\pi) = g(\pi) = 0$ も満たせば，それが可能となり，

$$u_\nu(t,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha_\nu \cos\nu t + \beta_\nu \sin\nu t)\sin\nu x + \sum_{\nu=0}^{\infty}(\gamma_\nu \cos\nu t + \delta_\nu \sin\nu t)\cos\frac{2\nu+1}{2}x$$

が解となる．

実はフーリエは，上のようなことを熱伝導方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}c(t,\, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}c(t,\, x)$$

について，条件

$$c(t,\, -\pi) = c(t,\, \pi) = 0,$$
$$\lim_{t\to 0+} c(t,\, x) = f(x), \quad (x \in (-\pi,\, \pi))$$

の下で考察した．解を変数分離形（$c(t,\, x) = e(t)v(x)$）で解こうとすると，$\frac{d^2}{dx^2}v/v = \frac{d}{dt}e/e$ は定数でなければならず，それを $-l$ とおけば，v は，常微分方程式の境界値問題

$$\frac{d^2}{dx^2}v + lv = 0, \quad v(-\pi) = v(\pi) = 0$$

の解で，e は，$\frac{d}{dt}e = -le$ の解である．ここで，関数 f が区分的に微分可能であり，境界条件 $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ も満たせば，

$$c_\nu(t,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \exp(-\nu^2 t) \sin \nu x + \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu \exp\left(-\frac{(2\nu+1)^2}{4}t\right) \cos \frac{2\nu+1}{2}x$$

が解となる．

8. フーリエ級数とフーリエ変換

前節の結果は，実数上の周期 2π の関数 f が

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

という形の無限級数で表されることを示唆している（図 3）．このとき，係数は

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt$$

で与えられる．これを関数の**フーリエ級数**展開と言う．実数上の周期 $2L$ の関数 f に対しては，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L}\right)$$

という形の無限級数に表される．このとき，係数は

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{k\pi t}{L}dt,$$
$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{k\pi t}{L}dt$$

で与えられる．これを代入し整理すると

$$f(x) = \int_{-L}^{L} f(t)\left(\frac{1}{2L} + \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi(x-t)}{L}\right)dt,$$

ここで，L を ∞ に近づけて，実数上の（良い性質をもつ，区分的に連続で絶対積分可能な）関数は，次のような表現をもつことがわかる．

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos s(x-t)dtds.$$

この式においてオイラーの関係式 $\cos s(x-t) = \frac{\mathrm{e}^{is(x-t)}+\mathrm{e}^{-is(x-t)}}{2}$ を使うと，

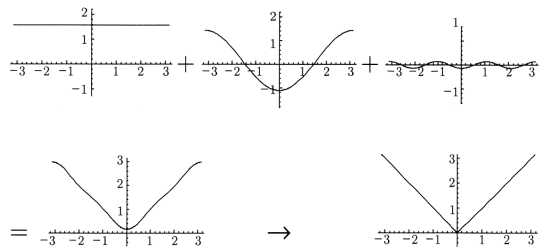


図 3　フーリエ級数による近似の様子.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{is(x-t)}dtds$$

という表示式を得る．これを 2 つの式，

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-ist}dt.$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\mathrm{e}^{isx}ds.$$

で表すことができ，F を f の**フーリエ変換**，f を F の**逆フーリエ変換**と言う．

フーリエ変換によって微分演算や変数の掛算についてはラプラス変換と似た規則が成り立ち，それを利用して定数係数の偏微分方程式の解を求めることができるが，紙数も尽きたのでここでは述べない．

フーリエ変換および逆フーリエ変換は，1 次元の場合のみならず多次元の場合も同様に定義される．

初めに述べた耳の検査であるが，頭にいろいろな方向から電磁波を当てた結果がフーリエ変換に相当し，それをもとに原像を復元するのが逆フーリエ変換に相当する．文献 1) に詳しい解説がある．

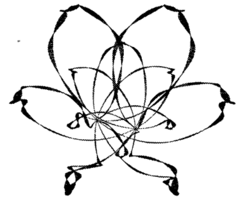
参考文献

1) 杉山健一，『フーリエ解析講義—理論と応用—』，講談社 (2003).
2) Harry Hochstadt, *Differential Equations*, Dover (1975).

（まじま・ひでゆき，
お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科）

線形代数と関数解析学

無限次元の考え方



河東　泰之

1. はじめに

線形代数は線形空間とその上の線形作用素を取り扱う．ごく基礎的な部分は線形空間が有限次元でも無限次元でも違いはないが，線形代数の中心的な話題，すなわち対角化，ジョルダン標準形，ランクの話などは，線形空間が有限次元でないと話がうまく進まない．そもそも行列を具体的に書く話が線形代数の中心であり，無限サイズの行列は最初から話に入っていない．この意味で通常の線形代数は有限次元の理論であると言ってもさしつかえない．これを無限次元で考察するのが関数解析学である．しかし，単に無限次元の線形空間やその上の線形作用素を考えたのでは，手がかりが少なすぎて，意味のある一般論はほとんど何も展開できない．そこで新たな手法が必要になる．それが収束の概念である．これを導入し，位相的な考察を加えた無限次元の線形代数が関数解析学である．

そもそもなぜ「関数」解析というのだろうか．それはさまざまな関数のなす無限次元空間が基本的な対象だからである．関数解析学成立の重要な動機を与えたのは，微分（あるいは積分）方程式と量子力学である．これら2つについては本特集でそれぞれ別に記事があるのでここでは詳しいことは書かないが，前者については関数が出てくるのは当然であり，後者についてもさまざまな関数が物理的状態を表すものとして現れることに注意しておこう．

以下，線形代数が無限次元でどのような形を取るのか見ていくことにする．

2. ヒルベルト空間とバナッハ空間

まず線形作用素の前に線形空間がなければ話が始まらない．通常の線形代数では，基底の話は重要であるが，それ以外にはあまり中身のある話はない．たとえば線形空間の公理自体にたいして中身があるわけではない．

通常の微分積分学では，数列の収束が基本的な概念である．n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ でも同様に点列の収束を考えることができるが，線形代数では，これらの収束概念はそれほど重要な役割を果たさない．しかし無限次元の線形空間では収束概念なしで有意義な議論を展開するのはなかなか難しいので，位相を備えた線形空間，すなわち位相線形空間が重要になる．（ベクトルの足し算やスカラー倍などの基本演算が連続になっていることを要請する．）位相はどのように定められてもいいのだが，「ベクトルの長さ」にあたるノルムという概念が定まっているものが，重要であり，また取り扱いやすい．（ノルムとは，基準，標準などの意味を持つ単語である．）ベクトル x に対し，そのノルムを $\|x\|$ と表し，これは0以上の実数値を取る．ノルムが0になるのはベクトルが0ベクトルのときだけである．ノルムの公理には三角不等式

$\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$ などがある．このような公理を満たすノルムが抽象的に存在すれば，2 つのベクトル x,y の間の距離を $\|x-y\|$ で定めることにより位相が定まる．典型的な例は，L^p-空間とそのノルム $\|f\| = (\int |f(x)|^p \, dx)^{1/p}$ である．（ここで $1 \le p < \infty$ とする．右辺が有限になるような f だけを考えるのである．）この線形空間の元は正確に言えば，ほとんど至る所一致する関数を同一視しているので，関数の同値類なのだが，どの点でどの値を取る，という関数として最も基本的な情報はとりあえず忘れて，一つのベクトルと思ってしまうわけである．

さらに重要なのは $p=2$ の場合であり，このときは f と g の内積 $(f,g) = \int f(x)\overline{g(x)} \, dx$ も定めることができる．この内積は高校で習う通常の内積の性質をみな持っている．そのような通常の内積の条件を公理化して得られるものが内積空間である．たとえば，コーシー・シュヴァルツの不等式は，これらの公理から従う．また 2 つのベクトルの内積が 0 であるとき，これらのベクトルは直交していると言う．素朴に考えると 2 つの関数が直交しているとか，抽象ベクトル空間の 2 つのベクトルが直交しているとはどういう意味か想像しがたい点もあるが，この定義は，古典的な直交の概念の性質をよく保っている．

なお通常の線形代数では，最初からベクトルを数ベクトルとして具体的に書いてしまうと，内積はもともと自然に定まっているような気がしてしまうが，内積は線形空間の公理からは独立したものであることを強調しておく．微分方程式の解が自然に有限次元の線形空間になることはよくあるが，必ずしもそこに自然な内積が定まっているわけではない．

さてこのように位相が定まってもそれだけでは不十分である．微分方程式の解などを作る際に，一気に作ることはうまく行かず，近似的にだんだんと精度を上げながら作っていくという方法がよくある．この際に，精度を上げ切った極限を考える必要があるが，抽象的な位相線形空間の設定でそのような極限が存在するかどうかは明らかではなく，そもそも一般的な設定では極限は存在しないこともある．そこでそのような極限の存在を保証する公理を入れておかないといけない．これが完備性の公理，すなわちコーシー列は収束する，というものである．大雑把に言えば，相互に限りなく近づいていくような点列には収束先がある，ということである．ノルムがあって，完備性が満たされているものをバナッハ空間と呼び，さらにそのノルムが内積から定まっているものをヒルベルト空間と言う．通常の線形代数はかなりの部分が有限次元バナッハ空間の理論であるが，自己共役行列，正規行列などの話は有限次元ヒルベルト空間論の一部である．線形代数の範囲では両者が混在していてもあまり問題にならないが，無限次元空間ではその区別をはっきりさせることが重要である．

線形空間としての基底，すなわち任意のベクトルを有限個の基底ベクトルの線形結合で表せるものはいつでも存在するが，無限次元線形空間でそのようなものを考えてもほとんど役に立たない．かわりに有用なのは，任意のベクトルを無限個のベクトルの線形結合で表すことである．ヒルベルト空間では，これを実現する正規直交基底を取ることがいつでもでき，有限次元空間とよく似た話が無限次元でも展開できる．フーリエ級数はその具体例として大変重要なものである．これに対し，一般のバナッハ空間の設定では基底の一般論はやっかいであり，あまりはっきりした結果は得られない．

ノルムがうまく定められないが自然に位相の入る線形空間もあり，さまざまなクラスが研究されているが簡単のためここでは省略する．

3. 有界線形作用素とコンパクト作用素

さて線形代数の中心的な話題は，線形作用素，あるいはその具体的な表示である行列である．無限次元でも同様であり，バナッハ空間あるいはヒルベルト空間の上の線形作用素を考えることになる．位相を考えたのであるから当然，もっとも自然なことは連続な線形作用素を考えることである．この連

続性は，線形作用素 T に対し，$\sup_{x\neq 0}\|Tx\|/\|x\|$ が有界であることと同値なので，通常有界性と呼ばれる．すなわち有界線形作用素が最も基本的な考察対象である．これが通常関数解析学で最初のほうに習うものであり，常識的に成り立つと期待される基本的な性質が実際に成り立っている．その次に習うのは，連続性より一見弱いような性質から自動的に連続性が成り立つと言う種類の結果（とその仲間）であり，これらは「常識的に成り立つと期待される」ということは全くない．これらはベールのカテゴリー定理から導かれるものであり，抽象的アプローチのパワーを示すものである．

さて上のように，有界線形作用素が，有限次元の行列に対応する無限次元の基本的な対象であるが，有限次元では成り立つのに無限次元では成り立たない性質がいろいろある．たとえば固有値や固有ベクトルの性質が典型的な例であり，これの無限次元版については後のセクションでふれる．これらの現象のあるものは，無限次元空間では有界閉集合がコンパクトとは限らない，ということに原因がある．通常の微分積分学では，あまりはっきり意識しないかもしれないが，有界点列から収束部分列が抜き出せるという性質が非常に重要な役割を果たしているのに，これは無限次元の線形空間では全く成り立たなくなってしまうのである．そこで有限次元に近いようなよい性質を成り立たせるには，線形空間の性質に期待するのはやめて，線形作用素のほうによりよい，より強い性質を仮定しなくてはならない．そのようにして考えられたのが，コンパクト作用素である．正確な定義は書かないが，大体，「像が有限次元に近い」というタイプの条件である．このとき通常の連続性より強い種類の連続性が成り立つので，完全連続作用素という名前もある．これは多様体上の微分作用素にも関連して重要な役割を果たす作用素である．

4. 非有界作用素

さて前のセクションで述べたように，連続な，あるいはさらに強くコンパクトな線形作用素を考えることが自然なのであるが，それだけでは話はすまない．微分方程式や量子力学においてもっとも基本的な線形作用素が連続ではないからである．たとえば，$L^2(\mathbf{R})$ における微分作用素や，$f(x)$ に，$xf(x)$ を対応させる掛け算作用素などである．（この 2 つは本質的には同じ作用素である．）そこで有界でない作用素も考える必要が出てくるが，せっかく導入した有界性を完全に落としてしまったのでは意味がない．有界性を適度に弱めた条件を考えなくてはいけないのである．それが，閉作用素というクラスであり，線形作用素 T のグラフ，すなわち $\{(x, Tx)\}$ が閉部分空間であるという条件である．ここで注意すべきなのは，T の定義域が元の空間全体とは限らないことである．上の例でも，$L^2(\mathbf{R})$ の一般の関数は微分可能ではないし，また $L^2(\mathbf{R})$ の一般の関数に x をかけたら $L^2(\mathbf{R})$ に入るとは限らない．しかしどちらの場合も，作用素の定義域は $L^2(\mathbf{R})$ 全体で稠密なので十分にたくさんあるとは言える．そこで，稠密な部分空間を定義域とし，グラフが閉部分空間となるような線形作用素を考えることが重要になるのである．

この閉作用素たちについては，連続性が成り立たないため，通常期待されるよい性質を持つとは言えず，さまざまな技術的な困難が発生する．しかし一方，グラフが閉部分空間と言うのはかなりたちのよい性質であり，それなりによい性質もいろいろと成り立つ．閉作用素の基本的な性質を学ぶことは関数解析学の初歩段階で重要なことである．

5. 固有値とスペクトル

線形代数において応用上も理論上も，もっとも重要な概念は固有値と固有ベクトルであろう．ジョルダン標準形や対角化の話もこれに付随した話題である．そこでこれを無限次元で考えることが重要である．線形作用素 T について，$Tx = \alpha x$ となる，0 でないベクトル x とスカラー α が存在する，という条件は無限次元でも全く同様に考えることができるが，そのような α は無限次元では一般に存在しなくなってしまう．そこで見方を少

し変えて，$T-\alpha$ が可逆でないような α たちを考えることにしてみる．ただしここで，T はあるバナッハ空間から自分自身への有界線形作用素であり，α はこのバナッハ空間の上の α 倍するという作用素である．また，「可逆」というのはこのバナッハ空間の上の有界線形作用素で逆作用素になっているものが存在すること，とする．（T として閉作用素を考えることも重要であるが，今は簡単のため，有界線形作用素に話を限る．）T が行列のときは，α がこの条件を満たすことと，α が固有値であることは同値であるが，無限次元では一般に，前者のほうが弱い条件である．このような α 全体は複素平面内の空でないコンパクト集合になることが示せて，この集合を T のスペクトルという．行列の固有値は有限集合をなすので，当然コンパクト集合になるが，無限次元では一般に有限ではないコンパクト集合が現れる．

コンパクト作用素については，上で述べたように，「行列に近い作用素」なので，スペクトルについても有限次元に近い性質が成り立つ．たとえば，スペクトルの点は原点以外は必ず固有値になることがわかる．

このようにスペクトルが固有値の役割を果たすのだが，何度も言うとおり，対角化やジョルダン標準形の理論が線形代数の基本であるので，その無限次元版を考えたい．しかしそのためには，一般のバナッハ空間ではうまくいかず，線形空間をヒルベルト空間に限る必要がある．さらに，有界線形作用素のほうも一般のものではなく，自己共役あるいは正規に限る必要がある．（自己共役作用素や正規作用素の定義は書かないが，いずれも，自己共役行列や正規行列の無限次元への自然な拡張である．）たとえば，$L^2([0,1])$ 上で $f(x)$ に $xf(x)$ を対応させる作用素 T を考えよう．ヒルベルト空間を $L^2(\mathbf{R})$ のかわりに $L^2([0,1])$ にしたので定義域はヒルベルト空間全体であり，これは有界線形作用素になっていることがわかる．この作用素のスペクトルは閉区間 $[0,1]$ である．α がこの区間に入っていないときは $T-\alpha$ の逆作用素は $1/(x-\alpha)$ を掛けるという作用素である．α がこの作用素の固有値であるとすると，$(x-\alpha)f(x)=0$ となる関数 $f(x)$ が定数関数 0 以外になくてはならないが，それは不可能である．（f が α に台を持つデルタ関数ならよいがこれは L^2-関数ではない．）一方 $\alpha\in[0,1]$ のとき，台が α を含む小さい区間に含まれているような L^2-関数 f については，Tf と αf は「ほとんど近い」．この意味でスペクトルの元 α は固有値ではないが，ほとんど固有値ではある．この種のことが自己共役作用素のスペクトルについてうまく成り立っているということがスペクトル分解と呼ばれることであり，自己共役行列のユニタリ対角化の無限次元版である．

ジョルダン標準形に関連して不変部分空間の存在問題も説明しておこう．バナッハ空間 X の上の有界線形作用素 T について，0 でも X 全体でもない閉部分空間 Y があって，$TY\subset Y$ となるものがあれば，T の性質の研究の一部は部分空間 Y の上への T の制限の研究に帰着できる．この意味で T の研究がより簡単なものの研究に帰着できる（可能性がある）ので，このような部分空間（不変部分空間と呼ばれる）があるかどうかは重要な問題である．一般のバナッハ空間の上の有界線形作用素ではそのような不変部分空間は存在しないことがあることがわかっているが，ヒルベルト空間の場合，いつでも存在するかどうかは古くから有名な未解決問題である．ヒルベルト空間の場合に限定したこの問題ですら解けないのであるから，ジョルダン標準形の理論の無限次元版は全くできていないし，何らかの適切な無限次元版があるのかどうかさえ疑わしい．

6. 作用素たちのなす代数系

$n\times n$-行列の全体は和や積で閉じているので環をなしている．これの無限次元版が作用素環である．行列環の環としての性質とは，両側イデアルが自明なものしかない（すなわち単純環である）とか，共役転置演算を保つ環の自己同型はユニタリ行列 U を使って $A\mapsto UAU^*$ とするものしかない，といったことである．通常の線形代数ではこ

のような環としての構造はあまり考えないが，私の専門が作用素環論であるので，これについても最後に少しふれておこう．

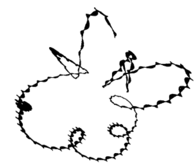
たとえばあるバナッハ空間の有界線形作用素全体は環をなし，それ自身がバナッハ空間である．これはバナッハ環と呼ばれるものの例であり，スペクトルの一般論はバナッハ環の枠組みで展開できる．このようなバナッハ空間の上の作用素からなるものではない，より抽象的なバナッハ環も考えることができ，そこでもスペクトルの理論を展開することができる．しかしこのような一般的な設定で展開できる理論には限界があり，あまり精密なことは理解できない．もっと限定的な状況で詳しく調べるほうが興味深い理論を展開することができ，それにはバナッハ空間ではなくヒルベルト空間の上で考える必要がある．そこでヒルベルト空間の上の有界線形作用素のなす環を考えるのだが，さらにヒルベルト空間の利点をフルに生かすには，共役転置演算（の無限次元版）で閉じているものを考えるのがよい．有限次元の場合は，たとえば $n \times n$ の上三角行列全体を考えるとこれは環をなしているが，共役転置演算では閉じていない．無限次元では今このようなものは考えないということである．（このようなものの無限次元版を考える理論もあるが，あまり詳しいことはよくわかっていない．）大体このようなものを考えるのが作用素環論であり，さらに環自身がバナッハ空間になっているものが C^*-環，さらに位相的に限定をつけたものがフォン・ノイマン環である．

行列 A, B に対し，一般に AB と BA が同じでないというのは真っ先に習う基本中の基本である．もちろんこれは無限次元でも同様であり，量子力学の基本を支える重要事項でもある．よって作用素環は通常非可換環なのだが，たまたま可換環になることももちろんある．このような可換な C^*-環は，コンパクト・ハウスドルフ空間 X の上の連続関数環 $C(X)$ に同型であることが昔からわかっている．またフォン・ノイマン環が可換な場合はさらに，ある測度空間の上の L^∞-関数のなす環に同型であることもわかっている．一般の作用素環は非可換環であるから，もはやコンパクト・ハウスドルフ空間や測度空間は存在しないのだが，気持ちとしては何か「非可換な空間」の上の関数を考えているように思うのである．（「空間の上の関数たち」の非可換な類似を考えているのだから，「非可換」という形容を「空間」の前につけるのはおかしいと言えばおかしいが，気分を表しているものなので仕方がない．）この意味で作用素環論が非可換な位相空間論や測度空間であるということは昔から言われていたことである．しかし，単なる位相空間や測度空間は，幾何学の対象としては構造が乏しい．もっと豊かな構造である，たとえばリーマン多様体の非可換版を考えようというのがコンヌの非可換幾何学である．その誕生から二十数年がたち，数学全体と理論物理学の広い範囲へのさまざまな応用が得られてきている．

すでにある幾何学を「非可換化する」という方針もよいが，真に興味深いのは非可換な状況でのみ起こる現象である．冨田–竹崎理論におけるモジュラー自己同型群の存在がその一つの例であり，スローガン的に言えば，非可換測度空間は，時間発展を自動的に生じる，ということである．（可換なフォン・ノイマン環でモジュラー自己同型群を考えても自明な恒等自己同型しか生まれないので，自明でないモジュラー自己同型群は真に非可換な状況でのみ起こる現象である．）また，コンヌによる外部共役によるフォン・ノイマン環の自己同型の分類理論や，エリオットによる従順単純 C^*-環の K-理論による分類プログラムも，可換版は無意味であったり全く成り立たなかったりすると言う意味でやはり，真に非可換な現象である．確率論やガロア理論もこのような意味で非可換化することができ，超弦理論からリーマン予想に関連する整数論まで，幅広い話題と関連して近年急速に発展している分野である．高度に技術的な話題が多いが，線形代数の無限次元版だ，という意識は常に重要かつ有用なアイディアを提供し続けている．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）

物理学と線形代数



荒木 不二洋

1. 力学と線形空間

物理学で通常最初に学ぶ組織的な理論はニュートン力学による粒子の運動であろう．粒子のサイズは無視して1点に凝縮しているものとして取り扱い質点と名付ける．太陽系の惑星の運動についても，大きな惑星でも（太陽系のスケールに対して小さいと考え）まずは質点としてその運動を取り扱う．

まず必要なことは質点の位置の記述である．直線上の運動では，直線上の1点を固定して原点と呼び，原点からの距離と向きにより直線上の点を実数に対応させてその実数を点の座標と呼ぶ．平面の場合は，1点Oで直交する（直角に交わる）2直線を基準にとり，Oをそれらの原点にとって x_1 軸，x_2 軸と呼ぶ．点Pに対し，Pから x_i 軸におろした垂線の足（Pを通り x_i 軸と直交する直線が唯一つ存在し，その x_i 軸との交点）の x_i 軸上の座標 p_i を点Pの第 i 座標と呼ぶ（$i=1,2$）と，平面上の点は2つの実数の組 (p_1,p_2) と1対1に対応し，(p_1,p_2) をPの座標と呼ぶ．立体の場合は同様に点Pを3つの実数座標の組 (p_1,p_2,p_3) で記述することができ，それをPの座標と呼ぶ．

質点の運動を考えるときには，ベクトルの概念が役に立つ．1点Pから点P′への移動を直観的に把握するためには，PからP′に向かう矢印 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ を使う．その向きや大きさが同じものを同一視したものがベクトルの考え方である．Pが原点のときをその同値類の代表とし，そのときのP′の座標を $\boldsymbol{v}$ の成分と言う．一般の $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ については，PがOに移るよう平行移動して考えると，$\boldsymbol{v}$ の成分は $p_i'-p_i$, $i=1,2$ であることがわかる．

次に2つの移動 $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ をこの順で行うと移動 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ が得られる．これをベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の和と呼んで $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ と書く．この和の成分は，それぞれのベクトルの成分の和になっていることがすぐにわかる．

移動については，向きを変えずに移動の大きさを2倍，3倍などと変えることができる．ベクトル $\boldsymbol{v}$ の向きを変えずに大きさを λ 倍したものは $\lambda\boldsymbol{v}$ と書く．また向きを正反対にして大きさを λ 倍したものは $(-\lambda)\boldsymbol{v}$ と書く．いずれの場合も成分はそれぞれ λ 倍および $-\lambda$ 倍になる．このように和と実数による掛算が定義されたベクトルの全体は，実線形空間になる．

質点の運動は時刻 t の関数としての位置 $\mathrm{P}(t)$ あるいはその成分 $p_i(t)$, $i=1,2,\cdots$ により記述される．（座標の数は運動する空間の次元である．）これを時間で微分して得られるベクトルは速度ベクトルであり，もう一度微分すると加速度ベクトルになる．ニュートンの運動第2法則は，加速度に質点の質量を掛けたものが力に等しいという法則である．この法則により力の概念がベクトル量として導入された．

ここで量子力学への伏線として，ベクトルの幾何学的諸量についての公式に触れておこう．まず

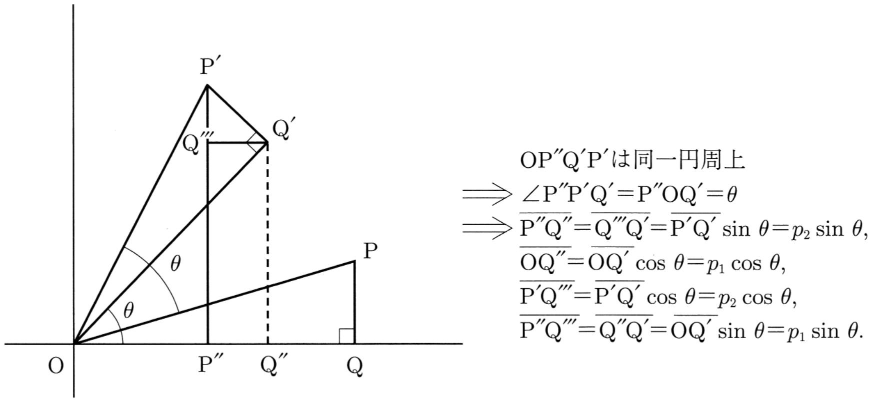


図 1　回転.

ベクトルの大きさ（長さ）は，2 次元の場合はピタゴラスの定理を使うと次の公式で与えられることがわかる．

$$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})},\quad (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=v_1^2+v_2^2.$$

ここで長さを $\|\boldsymbol{v}\|$ と表記したが，これはノルムという一般的な概念の特別の場合なので，ノルムの記号を使った．また v_1, v_2 は $\boldsymbol{v}$ の成分である．2 つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の内積の記号

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=u_1v_1+u_2v_2$$

を，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ の場合に適用して，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$ の記号を用いた．

他方，2 ベクトルのなす角を θ とすると

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$$

であることが,三角関数の加法公式を使うとわかる．

これらの表式とその幾何学的意味は，次元が 3 の場合でも，2 次元と同様に示すことができる．

3 次元のベクトルではさらに 2 ベクトルの外積が定義され，代数的演算と微分演算を含む種々の公式が展開され，ベクトル解析と名付けられているが，それは電磁気を含めた古典物理学の中から生まれた．

2. 対称性と作用素

まず空間の単純な変換として点の原点を中心とした回転を考えよう．2 次元の空間では原点のまわりの角度 θ の回転で点 P が P′ に移動したときその座標は（図 1 参照）

$$p_1'=(\cos\theta)p_1-(\sin\theta)p_2,$$
$$p_2'=(\sin\theta)p_1+(\cos\theta)p_2.$$

これを行列

$$A_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}'=\begin{pmatrix}p_1'\\ p_2'\end{pmatrix}$$

を使うと次のように簡潔に書くことができる．

$$\boldsymbol{p}'=A_\theta\boldsymbol{p}.$$

回転を表す行列 A_θ は，前節で導入した内積を次式の意味で不変に保つ．

$$(A_\theta\boldsymbol{u},A_\theta\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).$$

この式は左辺を具体的に計算すると右辺になることが $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ の関係を使ってすぐわかる．この不変性により，ベクトルの長さ $\sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}$ や，2 つのベクトルのなす角度 θ の $\cos\theta\ (=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})/\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|)$ が回転の下で変らないことがわかる．

ニュートンの万有引力の法則は，2 つの質点の間には 2 質点を結ぶ線分の向きに距離に逆比例する引力が働くと述べているが，距離（ベクトルの長さ）や，一つの質点に働く力（ベクトル）がその粒子からもう一つの質点に向う線分（ベクトル）と

同一方向であることも，回転によって変らないので，回転の下で不変な法則であると言える．物理の法則ではこのような不変性が重要な意味をもつ．

A_θ の例を含めて 2 次の行列 A は，2 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を別のベクトル $A\boldsymbol{u}$ に変える作用をもつが，この作用は次の線形性の性質をもつので，A は線形作用素と呼ばれる．

$$A(c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v})=cA\boldsymbol{u}+dA\boldsymbol{v}.$$

ここで，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ はベクトル，c, d は実数である．

線形作用素の積 A_1A_2 は $(A_1A_2)\boldsymbol{u}=A_1(A_2\boldsymbol{u})$ により定義される．2 次の実行列全体（$M_2(\mathbb{R})$ と書く）が今考えている線形作用素の全体であるが，その中で 2 つの元の和および積，さらに実数を掛けることが定義されていて，初等数学で使われる演算の規則（結合法則と分配法則）をみたしている．そのような代数を線形代数と呼ぶ．

その中で A_θ は相互に可換，すなわち

$$A_\theta A_{\theta'}=A_{\theta+\theta'}=A_{\theta'}A_\theta$$

という関係式をみたす．A_θ の線形結合の全体は，

$$\{cA_0+dA_{\frac{\pi}{2}};\ c \text{ と } d \text{ は任意の実数}\}$$

という集合で，$M_2(\mathbb{R})$ の（可換）部分線形代数である．

A_θ 相互は可換であったが，2 次の行列でも

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=-BA$$

のように非可換（$AB\neq BA$）であるものが含まれている．

3. 量子力学を導いた 2, 3 の現象

方程式を解くとき便宜上の仮の数として使用された虚数 i が，大数学者ガウス，コーシーなどの手を経て，数学の表舞台に登場したのは 19 世紀である．物理でも記述や計算の便宜上複素数を使用するようになったが，量子力学という革命的な物理理論により，複素数は現実世界の（量子力学的）記述で本質的な役割を果すことになった．この点について少し触れておこう．

光が波動であることは，17 世紀にホイゲンスが提唱しているが，19 世紀にスリットや鏡およびプリズムによる干渉縞の実験により，それぞれヤング（1802～04 年の実験），フレネル（1815, 1826 年の実験）が検証している．そしてマックスウェルは，もし光が電磁気の波であれば光の速さは電気量の電磁単位と静電単位の比であるはずだが，この値は 1856 年に測定された光の速さにほぼ等しいことを理由に，光が電磁波であることを予言し，1888 年にヘルツがこのことを実験的に検証した．

他方ヘルツは 1887 年に，放電装置の電極に紫外線を照射すると火花が飛びやすくなることを見出し，紫外線により電子が叩き出されたためと解釈した．1899 年にはレナルドが叩き出された粒子が電子であることを確かめた．それを光電子と呼ぶ．光の強さによって光電子の数は増減するが，光電子の最大エネルギー E は光の振動数 ν と電極の物質で定まるエネルギー量 W とで $E=h\nu-W$（h はプランクの定数）という関係式をみたす．1905 年にアインシュタインは，光が $h\nu$ というエネルギーをもった粒子（光量子，現在は光子と呼ぶ）の流れのように振る舞うという光量子説を提出した．（W は電子が電極に拘束されているエネルギー．）一つの粒子が波動性と粒子性をもつのが，量子力学的世界の特徴で，電子など常識的に粒子と見なされている場合でも確認されている．

空間の 1 点での電気力 $\boldsymbol{E}$ と磁力 $\boldsymbol{H}$ はベクトルであるが，電磁波ではそれらが光の進行方向に垂直であり，その強さは時間的に（また空間的にも）周期的に変化している．電場と磁場のベクトルの方向は直交しているが，それらが一定方向を保つ場合を平面偏光と言い，電場と進行方向を含む平面を振動面と呼ぶ．また電場と磁場の大きさが変らず方向が回転するものを円偏光と言い，特に進行方向から眺めたとき右回りのものを右旋円偏光，左回りのものを左旋円偏光と呼ぶ．大きさも方向も変化するものは楕円偏光と言う．

電気石の単結晶板に光を通すと，結晶の光軸に垂直な偏光面をもつ平面偏光は通過し，光軸に平行な偏光面をもつ平面偏光は通過しないので，平面偏光（に近いもの）が得られる．このとき偏光面が光軸と θ という角度の平面偏光を通すと強度が $(\cos\theta)^2$ くらいに落ちる．もし円偏光を通せば強度は半分くらい（の平面偏光）になる．

2 種類のものの混合物では，それぞれの性質が混合比率に応じて現れると考えるのが常識である．平面偏光の偏光面が直交する平面偏光を重ね合わすと，常識的な意味の混合になり，電場の方向も一定でなくなる．自然光も混合状態の一例で，一定方向の平面偏光を通過させると強度は半分，それと直交方向の平面偏光を（電気石の光軸を回転して）通過させると強度は半分，両者を合わせると全体の強度になる．

そこで自然光の代りに最初の光軸と角度 θ の偏光面をもつ平面偏光について上と同じことを行うと，それぞれ $(\cos\theta)^2$, $(\cos(\frac{\pi}{2}-\theta))^2=(\sin\theta)^2$ の強度で通過光が得られ，その和は 1 なので，自然光のようにこの割合で直交した偏光面の平面偏光の混合と見なせる条件をもっている．しかし，ある方向の偏光面をもつ平面偏光から，それと角度 θ をもつ平面偏光をまず取り出し（強度は $(\cos\theta)^2$ 倍），そのように取り出した平面偏光から最初の平面偏光の偏光面と直交する（したがって一度取り出した平面偏光の偏光面と $\theta'=\frac{\pi}{2}-\theta$ の角をなす偏光面をもつ）平面偏光を取り出す（強度はさらに減って $(\sin\theta)^2$ 倍）と，強度は減っているがもとの偏光面と直交する偏光面の平面偏光が取り出せたことになって，単純な混合状態の考え方では解釈できない．

波動の記述には $\cos(2\pi x)$ のような周期関数 $f(x)$ を用いる．f は周期 1 をもつ（$f(x+1)=f(x)$）として，

$$g(x,t)=f\left(\frac{x}{\lambda}-\nu t+a\right)$$

と置くと，この関数は固定点 x では時間 t とともに単位時間当たり ν の振動を行い，各時刻 t では空間的に波長 λ の周期を持ち（波形は f による），

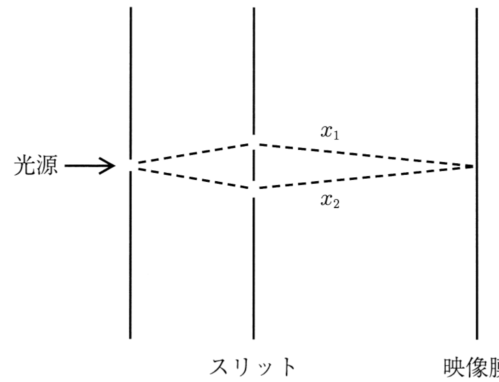


図 2　ヤングの実験.

波の伝播速度は $c=\lambda\nu$ （$\frac{x}{\lambda}-\nu t=$ 一定 となる x は単位時間に c 動く）である．$\frac{x}{\lambda}-\nu t+a$ は位相と呼ばれ，a は $x=t=0$ での位相である．

波の速さ c と振動数 ν が一定（光では速さは一定で，光の色を決めれば ν も一定）で位相が違うものを加える（これを波の重畳と言う）と，

$$\cos\left(2\pi\nu\left\{\frac{x_1}{c}-t\right\}\right)+\cos\left(2\pi\nu\left\{\frac{x_2}{c}-t\right\}\right)$$
$$=2\cos\left(2\pi\nu\left\{\frac{x_1+x_2}{2c}-t\right\}\right)\cos\left(2\pi\nu\frac{x_1-x_2}{2c}\right)$$

となり，位相差 $2\pi\nu\frac{x_1-x_2}{2c}=\frac{\pi}{2}+n\pi$ の所で 0 になる．波の干渉縞は同じ波を 2 つのスリットから通すと，映像膜上に上記のように暗くなる所が縞状にできる現象であり，波動の特徴とされる．

ヤングの実験（図 2 参照）では干渉縞は写真乾板に記録するが，そこでは光電効果と同じ光の粒子性を使っている．しかし光が粒子ならスリットのどちらかを通るはずだからと考え，スリットの片方をふさいで半分の時間実験を行い，あと半分の時間は他方のスリットをふさいで実験を行っても干渉縞は現れない．しかし両方のスリットを空けて実験を行うと干渉縞が現れる．これは入射光が非常に弱くて光子が 1 個ずつ来たと思われるときでも同じである．

4. 線形空間の活用と複素数の登場

平面偏光を記述する模型として，次のようなルールを作ってみよう．ただし光の波長（すなわち色）および進行方向は差し当り固定して考える．する

と平面偏光の偏光面は進行方向を含む平面なので，進行方向に垂直なベクトル全体，すなわち 2 次元平面のベクトルで記述できる．ベクトルの向きだけが重要で，長さは混合の割合を記述するために取っておいて，長さ 1 の 2 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ で記述しよう．偏光 $\boldsymbol{u}$ から偏光 $\boldsymbol{v}$ を（電気石などを使って）取り出したときの強度の減少率 $\cos^2\theta$ は $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2$ と書ける．これは $\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{v}$ である確率とも解釈できる．また $\boldsymbol{u}$ と $-\boldsymbol{u}$ は同じ偏光面を表すので同じ状態を表すものとする．そこで特定の互いに直交する長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ を固定して考えよう．例えば $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1)$ でよい．$\boldsymbol{e}_1$ と角 θ をなすベクトル $\boldsymbol{f}_\theta$ を (k_θ,l_θ) とすれば，$|k_\theta|=|\cos\theta|$, $|l_\theta|=|\sin\theta|$ である．$\pm\boldsymbol{f}_\theta$ は同じ状態を表すので $k_\theta=\cos\theta$ とすれば $l_\theta=\pm\sin\theta$ となる．一つの θ_0（例えば $\theta_0=\frac{\pi}{4}$）に対しては，$\pm\boldsymbol{e}_2$ が同じ状態を表していることを使って，$\boldsymbol{e}_2$ を適当なほうに取れば

$$\boldsymbol{f}_{\theta_0}=(\cos\theta_0)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta_0)\boldsymbol{e}_2$$

が成立する．他の θ については，$|(\boldsymbol{f}_\theta,\boldsymbol{f}_{\theta_0})|$ がわかっていることを使うと，

$$\boldsymbol{f}_\theta=(\cos\theta)\boldsymbol{e}_1+(\sin\theta)\boldsymbol{e}_2$$

という形がきまる．この $\boldsymbol{f}_\theta$ について $|(\boldsymbol{f}_\theta,\boldsymbol{f}_{\theta'})|$ を計算すると，$|\cos(\theta-\theta')|$ となって，平面偏光に関する実験結果は完全に説明できる．$\boldsymbol{f}_\theta$ の形を決めるのに使った実験結果は $\theta'=0$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ に対する $(\boldsymbol{f}_\theta,\boldsymbol{f}_{\theta'})$ の情報だけなので，すべての θ' に対して実験結果と合致していることは一つの成功である．

ところで平面偏光以外に円偏光が 2 種類存在する．例えば右旋円偏光の状態を $\boldsymbol{f}_r$ とおくと，実験結果は

$$|(\boldsymbol{f}_r,\boldsymbol{f}_\theta)|^2=\frac{1}{2}$$

がすべての θ に対して成立する．このような $\boldsymbol{f}_r$ は今考えている線形空間には見つからない．

ところが，線形空間を少し拡張して複素数を使うと次のようにうまくいくことがわかる．

2 次元の実線形空間のベクトルは，2 個の実数成分 u_1,u_2 の組により $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ の形で表示された．そこで u_1,u_2 として複素数を許すことにする．このとき内積の定義を次のように少し変更する．

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\bar{u}_1v_1+\bar{u}_2v_2.$$

ただし，$\bar{u}_1,\bar{u}_2$ は u_1,u_2 の共役複素数（$z=x+iy$ x,y は実数，のとき $\bar{z}=x-iy$）である．また複素数 c とベクトル $\boldsymbol{u}$ の積は

$$c\boldsymbol{u}=(cu_1,cu_2)$$

と定義する．このようにして得られる複素係数の線形空間は，2 次元ヒルベルト空間と呼ばれる．（上記は量子物理における内積の定義である．数学では

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=u_1\bar{v}_1+u_2\bar{v}_2$$

と定義する．単に右と左の違いで本質的な違いはないが，どちらの文献かで異なるので注意が必要である．）

この 2 次元ヒルベルト空間を用いると，実験結果を説明できる $\boldsymbol{f}_r$ が次のように 2 個得られる．

$$\boldsymbol{f}_r=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{i}{\sqrt{2}}\right),\quad \boldsymbol{f}_l=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-i}{\sqrt{2}}\right).$$

これらは，

$$|(\boldsymbol{f}_r,\boldsymbol{f}_\theta)|=\frac{1}{2},\quad |(\boldsymbol{f}_l,\boldsymbol{f}_\theta)|=\frac{1}{2},$$
$$(\boldsymbol{f}_r,\boldsymbol{f}_l)=0$$

をみたす．そこで例えば右旋円偏光を $\boldsymbol{f}_r$，左旋円偏光を $\boldsymbol{f}_l$ で記述すれば，実験結果をすべて説明できることがわかる．実はこの 2 次元ヒルベルト空間は，一般の楕円偏光を記述するのにちょうど十分なだけの複素ベクトルをもっているのである．

5. 場の理論と作用素環

量子力学では，状態をヒルベルト空間の長さ 1 のベクトル（正確には絶対値の複素数 $e^{i\theta}$ を掛けて得られるベクトルはすべて同一視したもの）で表す．そのもっとも簡単な場合を前節で説明した．他方物理量は自己共役作用素で表す．作用素の例は 2 節の回転の話で出てきたように，ヒルベルト空間のベクトルの変換を与えるもので，ベクトルの線形結合（複素係数をベクトルに掛け，それら有限個を加えたものを指す）を保つものを指す．作

用素の線形結合は，それが作用するヒルベルト空間の線形結合により自然に定義され，また作用素の積は変換の積み重ねとして定義される．さらに微妙な点を別にすれば，作用素 Q が自己共役であるというのは，$(\boldsymbol{u}, Q\boldsymbol{v}) = (Q\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ が成立することを指す．そして実験結果との結びつきは，ベクトル $\boldsymbol{u}$ で表される状態で物理量 Q の期待値（多数の測定値の平均）が $(\boldsymbol{u}, Q\boldsymbol{u}) = (Q\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ で与えられることである．

作用素に関しては，線形結合および積を作ることができるので線形代数を生成する．無限次元のヒルベルト空間では，位相に関して閉じたものを考える．さらに有界（すなわちノルム有限）作用素に限定する．また $(\boldsymbol{u}, Q\boldsymbol{v}) = (Q^*\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ により定義される作用素 Q^* を Q とともに含むものも考える．位相として作用素ノルムに関し閉じたものは C^* 環と呼ばれる．また単位作用素を含み，作用素弱位相（すべてのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について $(\boldsymbol{u}, Q\boldsymbol{v})$ の収束）に関し閉じたものはフォン・ノイマン環と呼ばれ，両者を作用素環と総称する．（フォン・ノイマンは後者を作用素環と呼んだ．）

作用素環論の物理学への応用は，場の理論と統計力学で著しく，場合によって作用素環の数学的研究に影響を与えたり，両者が一つの論文で同時に発展したりと，深い関係をもっている．その重要な一例は既に 1967 年に生じた作用素環のモジュラー理論（冨田・竹崎理論）と統計力学的平衡状態の特徴付けとしての久保・マーティン・シュヴィンガー境界条件（KMS 条件と略称）の相互関係であろう．このあと平衡統計力学の数学的基礎付けに大きな影響を与えた．

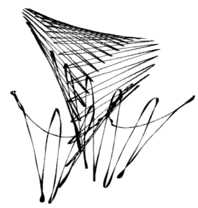
また場の理論では，4 次元時空の領域 $\mathcal{O}$ ごとに，$\mathcal{O}$ の中の実験器具で観測可能な物理量（作用素である）が生成する作用素環 $A(\mathcal{O})$ の全体を基礎的な対象として，物理的に妥当と考えられる性質を仮定した上で，物理的に意味がある結論を数学的に導く努力がなされ，成果をあげている．

制限紙数の関係もあり，これらの説明は別の機会にしたい．

（あらき・ふじひろ，京都大学名誉教授）

特集／線形代数の力

数理工学と線形代数



岩田　覚

1. 数理工学

数理工学とは，問題解決の数学的方法論を探求する学問である．数学を応用して，何事かを成し遂げるという意味では，応用数学と呼んでよいのかも知れない．しかし，数理工学という言葉には，単に既成の数学を現実の問題に適用するという一方向的な営みではなく，現実の問題から出発し，その解決に必要な数学的手法を創造する姿勢が強調されている．その意味で，情報理論や制御理論は，まさに数理工学の典型と言える．

数学的手法による問題解決と言っても，実際にどの分野の理論が，どのような対象に有効であるかを見極めるのは決して簡単でない．自らが興味を持った問題を解決するための道具として，数学のある分野が使えることを見抜くには，その分野に関する知識がなくてはならない．それには，使えるかどうかは分からない段階から，予め数学を勉強しておく必要がある．

数理工学を志す者は，学生時代に何を学ぶべきか．実は意外と難しい問題である．数学の専門家を目指したカリキュラムと同じでよいとも思えない．とはいえ，将来どのような問題に取り組むにせよ，線形代数を使いこなせることは必須であろう．実際，学部初年度に誰もが学ぶ線形代数から，もう一歩だけ先に進むと，様々な応用と繋がった話題が沢山ある．本稿では，その一部を紹介しよう．

2. Markov 連鎖

Markov 連鎖は，人口動態から音声情報，自然言語に至るまで，広い範囲に適用可能な離散確率過程のモデルである．各時刻においては，有限個の状態の中のいずれかが実現されるものとする．次の時刻における状態は，現在の状態にのみ依存した推移確率によって定まる．状態 i から状態 j へ推移する確率を p_{ij} とすると，行列 $P=(p_{ij})$ に関して，$P\mathbf{1}=\mathbf{1}$ となる．ただし，$\mathbf{1}$ はすべての要素が 1 のベクトルを表す．このように各要素が非負で，行和が 1 の正方行列を確率行列と言う．Markov 連鎖の挙動は，確率推移行列 P の性質によって決定される．

確率行列は，その定義から明らかなように，固有値 1 を持つ．他の固有値も，複素平面上の単位円板上に分布する．このことは，一般に n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の任意の固有値は，複素平面上で，対角成分 a_{ii} を中心とした半径 $r_i=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ の円板 D_i の合併集合 $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ の中にあるという Gershgorin の定理から容易に導くことができる．

状態推移を表す有向グラフが強連結であれば，非負正方行列に関する Perron–Frobenius の定理によって，正ベクトルを固有ベクトルとする正の固有値が存在する．確率行列の場合には，この固有値は 1 となる．さらに，閉路長の最大公約数が 1 のとき，固有値 1 に対応する横固有ベクトルが，無限の時間が経過した後の分布である極限分布を与える．極限分布への収束の速さは，固有値の絶対値のうちで，2 番目に大きな値によって決まる．

Markov 連鎖は現象の記述だけでなく，Markov 連鎖 Monte Carlo (MCMC) 法と呼ばれるサンプリング法にも使われている．この方法で一様分布を実現するためには，確率推移行列の列和も 1 となるような Markov 連鎖を設計しなくてはならない．このような行列は，

二重確率行列と呼ばれている．各行各列に 1 が一つだけあり，他の要素はすべて 0 である置換行列も二重確率行列の例である．任意の二重確率行列は，置換行列の凸結合で書けることが，Birkhoff–von Neumann の定理として知られている．

3. 線形計画法

Markov 連鎖と同様に，線形代数と非負性を結び付けて，応用上有用な枠組みを提供しているのが，線形計画法である．線形計画問題とは，有限個の線形不等式制約を満たす変数の組のうちで，線形関数で与えられる目的関数を最大もしくは最小にするものを求める最適化問題である．標準的には，

$$\max\{cx \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$

を求める問題である．これに対して，双対問題

$$\min\{yb \mid yA \geq c,\ y \geq 0\}$$

を考える．両者の制約条件を満たす解 x, y の組に対して，$yb \leq yAx \leq cx$ が成り立つことは明らかである．さらに，もし両者に制約条件を満たす解が存在するならば，その中で $y^*b = cx^*$ を満たす解 x^*, y^* が存在する．このような解 x^*, y^* は共に最適解になり，元の問題と双対問題の最適値が一致することが分かる．これが，線形計画法の双対定理である．

一般に，A, b, c の要素が整数値であっても，線形計画問題の最適解が整数値になるとは限らない．しかし，A がすべての小行列式が 0 か ± 1 という完全ユニモジュラ行列であり，b が整数ベクトルである場合，最適解の中に整数解が存在することが保証される．さらに，c も整数ベクトルならば，双対問題にも整数最適解が存在する．

4. マッチング

点の集合 U, V と両者を結ぶ辺の集合 E からなる 2 部グラフ $G = (U, V; E)$ を考える．どの 2 本も辺も端点を共有しない辺部分集合 $M \subseteq E$ をマッチングと言う．一方，任意の辺に対して端点の少なくとも一方を含む点部分集合 $Y \subseteq U \cup V$ を点被覆と言う．任意のマッチング M と点被覆 Y の組に対して $|M| \leq |Y|$ となることは容易に確かめられる．さらに，マッチングの辺数の最大値が，点被覆の点数の最小値に等しいというのが，König の定理である（図 1）．

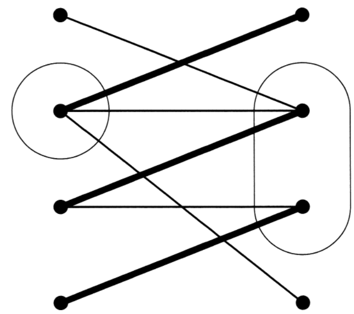


図 1　最大マッチングと最小点被覆．

各辺 $e \in E$ に非負の変数 x_e を割り当て，各点に接続する辺 e に関する x_e の総和が 1 以下という制約条件を書き下して得られる線形不等式系 $Dx \leq \mathbf{1}$ を考える．このとき，係数行列 D は完全ユニモジュラ行列となる．したがって，線形計画問題 $\max\{\mathbf{1}x \mid Dx \leq \mathbf{1}, x \geq 0\}$ とその双対問題 $\min\{y\mathbf{1} \mid yD \geq \mathbf{1}, y \geq 0\}$ は共に整数最適解を持つ．整数最適解 x^*, y^* の要素は 0,1 の値を取るので，$M^* = \{e \mid x^*_e = 1\}$ がマッチング，$Y^* = \{v \mid y^*_v = 1\}$ が点被覆となり，$|M^*| = |Y^*|$ より，König の定理が証明される．

特に，$|U| = |V|$ で $E = U \times V$ の場合，上記の線形計画問題の最適解の集合は，二重確率行列の全体に対応する．この多面体の端点が置換行列に対応することから，Birkhoff–von Neumann の定理が導かれる．

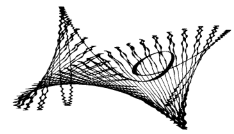
König の定理自体はグラフ理論的手法でも証明できる．ここで紹介した線形計画法と整数性から最大最小定理を導く手法は，他の多くの組合せ最適化問題にも適用可能であり，アルゴリズム設計の強力な枠組みに発展している．

参考文献

1) 伊理正夫：『一般線形代数』，岩波書店，2003.
2) 伊理正夫・韓太舜：『線形代数—行列とその標準形』，教育出版，1977.
3) 木村英紀：『線形代数』，東京大学出版会，2003.
4) G. ストラング：『線形代数とその応用』，産業図書，1978.

（いわた・さとる，京都大学数理解析研究所）

行列雑話



山本　哲朗

1. まえがき

非零要素の多いいわゆる密行列を係数とする80元連立1次方程式を，IBM7074を用いて誇らしく解いたのは1963年のことである．当時はメモリーも少なく80次密行列は大型行列で，(畳1帖)×(奥行き30 cm) くらいの磁気テープ装置数台を併用し，データを分割処理して解くというものものしさであった．以来45年．現在では，この程度の計算は学生の演習問題になってしまった．

しかしながら，いくら時代が進んでも，行列の魅力が失われることはない．本稿では，線形代数の教科書に記載のない行列若干をとりあげて，その効用を述べる．以下行列は実行列とする．

2. 3重対角行列

次の形の行列を3重（または3）対角行列と言う．

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

この形の行列はいろいろなところに登場し，多くの興味深い性質をもつ．その一つとして

定理 1. $\beta_i\gamma_i > 0,\ \forall i$ ならば，A_n の固有値はすべて相異なる実数である[1)]．

また，A_n の特性多項式 $\Delta_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_n)$ を第 n 行につき展開すれば，漸化式

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= \lambda - \alpha_1, \\ \Delta_n(\lambda) &= (\lambda - \alpha_n)\Delta_{n-1}(\lambda) \\ &\qquad - \beta_{n-1}\gamma_{n-1}\Delta_{n-2}(\lambda) \quad (n \geq 2) \end{aligned} \qquad (2)$$

が成り立つ．但し，便宜上 $\Delta_0(\lambda) = 1$ とおく．

さて，開区間 (a, b) と重み関数 $w(x) > 0$ が与えられたとき，それらに関する n 次直交多項式 $p_n(x)$ は，高々 $n-1$ 次の任意の多項式 $q(x)$ に対し

$$(p_n, q)_w \equiv \int_a^b p_n(x)q(x)w(x)dx = 0$$

をみたすものとして定義される．ここで最高次 x^n の係数を1と定めれば，$p_n(x)$ は一意に定まり，

$$a_n = (xp_{n-1}, p_{n-1})_w/(p_{n-1}, p_{n-1})_w,$$
$$b_n = (p_n, p_n)_w/(p_{n-1}, p_{n-1})_w \quad (n \geq 1)$$

として，次の漸化式をみたす[1)]．

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - a_1,$$
$$p_n(x) = (x - a_n)p_{n-1}(x) - b_{n-1}p_{n-2}(x) \quad (n \geq 2).$$

この漸化式を (2) と比較すれば，$p_n(x)$ は (1) において，$\alpha_i = a_i, \beta_i = b_i, \gamma_i = 1$ とおいた3重対角行列 A_n の特性多項式に等しい．しかも $\beta_i\gamma_i = b_i > 0,\ \forall i$ であるから，定理1により，$p_n(x)$ の零点は相異なる実数である．さらに，これらの零点がすべて開区間 (a, b) 内にあることも容易に示される．有名なガウスの数値積分公式[1)]はこの事実を利用している．

なお，正則な3重対角行列の逆行列はグリーン行列と呼ばれる．その名が示すように，この行列は2点境界値問題におけるグリーン関数と密接な関係をもつことが知られている[2,3)]．

3. $\boldsymbol{L}$ 行列と $\boldsymbol{M}$ 行列

すべての非対角要素が負か零の行列を Z 行列と言い，対角要素がすべて正の Z 行列を L 行列と言う．また，正則な Z 行列で逆行列が非負行列（すべての要

素が非負）となるものを M 行列と言う．このような行列は一見，応用とは無縁に見えるが，常・偏微分方程式の境界値問題を離散近似して解くときに現れる．実はそのとき現れる行列の多くは，「既約優対角」と言うさらに強い条件をみたす L 行列であって，その逆行列は正行列（すべての要素が正）となる[1,2]．

4. $\boldsymbol{P}$ 行列と $\boldsymbol{P_0}$ 行列

行列 A が $P(P_0)$ 行列であるとは，A のすべての主小行列式が正（非負）のときを言う．明らかに $P(P_0)$ 行列は正定値（半正定値）対称行列の一般化である．これらの行列は Fiedler と Pták により導入された[4,5]．

さて，成分がすべて非負のベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}$ と表すとき，$\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v} = 0$ をみたすベクトル $\boldsymbol{x}$ を見出す問題を線形相補性問題（linear complementarity problem, 略して LCP）と言う．最適化分野で，次の定理が知られている[6]．

定理 2. LCP が任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して一意解をもつための必要十分条件は，A が P 行列であることである．

一方，P, P_0 行列は回路の解析にも現れる．

$$\mathcal{F} = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f(\mathbb{R}) = \mathbb{R},\ f'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\} \tag{3}$$

$$\mathcal{F}^n = \{F(\boldsymbol{x}) = (f_1(x_1), \cdots, f_n(x_n))^{\mathrm{t}} \mid f_i \in \mathcal{F},\ 1 \leq i \leq n\} \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{t}})$$

とおき，方程式

$$F(\boldsymbol{x}) + A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (F \in \mathcal{F}^n,\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n) \tag{4}$$

を考える．これはある種の非線形抵抗回路の方程式を表す．このとき，次が成り立つ[7]．

定理 3.（Sandberg–Willson の定理） 方程式 (4) が任意の $F \in \mathcal{F}^n$ と任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ につき一意解をもつための必要十分条件は，A が P_0 行列であることである．

5. $\boldsymbol{\Omega}$ 行列

この行列は P, P_0 行列の一般化として，西（九州大学）により導入された[8,9]．行列 A が Ω 行列であるとは，$A+D$ が正則となるような任意の正対角行列（対角要素がすべて正の対角行列）D に対し，$(A+D)^{-1} = (b_{ij})$ が符号条件「$b_{ii} < 0$ ならば $b_{ij} \leq 0, \forall j \neq i$」をみたすときを言う．(3) の $\mathcal{F}$ を

$$\hat{\mathcal{F}} = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid f(\mathbb{R}) = \mathbb{R},\ f'(x) > 0,\ f''(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

でおきかえると，次の定理が成り立つ．これは西・川根（1991）[8]による結果である．

定理 4. 方程式 (4) が任意の $F \in \hat{\mathcal{F}}^n$ と任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ につき，高々 2^n 個の解をもつための必要十分条件は，A が Ω 行列であることである．

6. あとがき

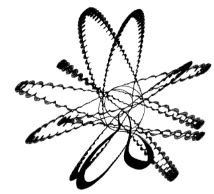
1997 年秋早稲田大学大石進一教授主宰の国際研究会が同大学で開かれた．筆者はそこで九州大学工学部西哲生教授から，回路理論における P 行列と P_0 行列の重要性を指摘され，Sandberg–Willson の定理の存在を知った．この定理は回路理論関係者の間では周知の由であり，証明も美しいが，筆者の知る限り，国内外の数学書には全く記載がない．この定理をめぐる話題については，他日稿をあらためて述べたい．

参考文献

1) 山本哲朗：『数値解析入門（増訂版）』サイエンス社，2003 年．
2) 山本哲朗：数理科学 1997 年 5 月号，54–61.
3) 山本哲朗：『2 点境界値問題の数理』コロナ社，2006 年．
4) M. Fiedler and V. Pták: *Czech. Math. J.* **12** (1962), 382–404.
5) M. Fiedler and V. Pták: *Numer. Math.* **9** (1966), 163–172.
6) A. Berman and R.J. Plemmons: *Nonnegative Matrices in Mathematical Sciences*, Academic Press, 1979.
7) I.W. Sandberg and A.N. Willson Jr.: *B.S.T.J.* **48** (1969), 1–34.
8) T. Nishi and Y. Kawane: *IEICE Trans. E* **74** (1991), 479–487.
9) T. Nishi: *IEICE Trans. E* **79-A** (1996), 1523–1529.

（やまもと・てつろう，愛媛大学名誉教授）

線形代数と制御理論



木村　英紀

1. 周波数領域と時間領域

制御理論が線形代数を使うようになったのは，1960年に Kalman が**状態空間法**を提案して以来である．Kalman 以前の制御理論は制御対象を周波数領域で記述した伝達関数の理論であり周波数領域の枠組は1930年代, 40年代を通した制御理論の基本的なパラダイムであった．周波数領域の制御理論は制御対象を伝達関数で記述する．伝達関数は次のような有理関数で表される．

$$G(s)=\frac{b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}. \qquad (1)$$

ここで s はラプラス変換のパラメータである．この伝達関数で表現されるダイナミックスは次のような微分方程式で表される．

$$\dot{x}=Ax+bu,\quad y=cx, \qquad (2)$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_n&-a_{n-1}&\cdots&\cdots&-a_n\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}, \qquad (3)$$

$$C=\begin{bmatrix}b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1\end{bmatrix}.$$

(2) 式をラプラス変換すれば分るように，(1) 式で表される伝達関数は，(3) 式で与えられた行列 A とベクトル b, c を用いて

$$G(s)=c(sI-A)^{-1}b \qquad (4)$$

と書ける．(4) 式の表現こそが周波数領域と時間領域を結びつける基本的な関係式である．もちろん与えられた (1) 式の有理関数に対して (4) 式を満足する A, b, c は一意には決まらない．任意の正則行列 T に対して $A'=TAT^{-1}$, $b'=Tb$, $c'=cT^{-1}$ とおいた A', b', c' に対しても (4) 式が成り立つことは容易に確かめることができよう．

(1) 式の表現，すなわち周波数領域と，(2) 式の表現，すなわち時間領域のどちらが優っているか，についでは制御工学の研究者の間で長い論争があった．結論としては，多入力多出力系を扱う場合（すなわち u や y がベクトルの場合）とシミュレーションや最適化など各種設計計算には圧倒的に時間領域が優れていることが定説となっている．そして制御理論は基本的に時間領域で進んできた．

2. 因子分解とリッカチ方程式

定常確率過程はパワースペクトラム $Z(j\omega)$ で特徴付けられる．ω は角周波数である．$Z(j\omega)$ は任意の ω で非負であるから，次のような因子分解が可能であることが知られている．

$$Z(s)=V(s)V(-s). \qquad (5)$$

ここで $V(s)$ は極もゼロ点も複素左半平面にある関数，すなわち $V(s)$, $V(s)^{-1}$ は共に安定な関数である．上の式で $s=j\omega$ とおけば $U(j\omega)=|V(j\omega)|^2$ となる．これは Wiener の因子分解の定理としてよく知られている．この因子分解は $Z(s)$ が行列の場合でも可能なことが知られているが，実際の計算は大変である．

いま $z(t)$ が信号 $y(t)$ に白色雑音 $n(t)$ が加算されたものと考えよう．信号 $y(t)$ は (2) 式で記述されるとしよう．ここで $u(t)$ は分散1の白色雑音とする．

$y(t)$ と $n(t)$ が無相関とすると $z(t)$ のパワースペクトラムは

$$Z(s) = r + c(sI - A)^{-1}bb^T(-sI - A^T)^{-1}c^T \tag{6}$$

と書くことができる．ただし r は $n(t)$ の分散である．(6) 式の $Z(s)$ に対して (5) 式のような因子分解は次のようなリッカチ方程式を解くことによって得られる．

$$AP + PA^T + bb^T - \frac{1}{r}Pc^TcP = 0. \tag{7}$$

この式に sP を加えて引くという変形を行うと，次式を得る．

$$Z(s) = \left(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}c(sI - A)^{-1}Pc^T\right) \times \left(\sqrt{r} + \sqrt{r}\,cP(-sI - A^T)^{-1}c^T\right).$$

つまり $V(s) = \sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}c(sI - A)^{-1}Pc^T$ が (5) 式を満足するのである．こうして (5) 式の因子 $V(s)$ を求めることは式 (7) で与えられたリッカチ方程式を解くことに帰着される．上の $V(s)$ は A が安定行列であれば安定であるが，その逆 $V(s)^{-1}$ が安定であるという保証はどこから得られるだろうか？

3. リッカチ方程式の求解

(7) 式のリッカチ方程式は最適レギュレータの解法にも登場する制御理論の中核概念である．未知数が P の要素の数 n^2（実際は対称性から $n(n+1)/2$）の非線形代数方程式であるから n が大きい場合はもちろん解析的に解くことはできない．数値的に解く方法は色々提案されているが，最もエレガントな方法はハミルトン行列と呼ばれる行列

$$H = \begin{bmatrix} -A & -bb^T \\ -\frac{1}{r}c^Tc & A^T \end{bmatrix} \tag{8}$$

の固有値問題に帰着させる方法である．行列 H は $2n \times 2n$ の行列であるから $2n$ 個の固有値をもつ．$2n$ 個の固有値は原点に対して対称性をもっていることが知られている．つまり λ が固有値であれば $-\lambda$ も固有値である．従って実部が負の固有値が必ず n 個存在する．それに対応する n 個の H の固有ベクトルを取り出してそれを並べた $2m \times n$ 行列の上半分を X，下半分を Y とすると，次式が成り立つ．

$$H\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\Lambda \tag{9}$$

ここで Λ は H の固有値のうちで実部が負のものに対するジョルダン標準形の部分である．このとき Y は必ず正則行列となることが示される．(9) 式から Λ を消去して $P = XY^{-1}$ とおくと P は (7) 式のリッカチ方程式を満足することが分る．

さて $V(s)^{-1} = \left(1 - c(sI - A + Pc^Tc/r)^{-1}Pc^T/r\right)/\sqrt{r}$ である．また (9) 式の下半分の関係から

$$Y\left(A - \frac{1}{r}Pc^Tc\right)Y^{-1} = \Lambda$$

となることが分る．Λ は実部が負の固有値をもつ行列なので $A - Pc^Tc/r$ は安定である．従って $V(s)^{-1}$ は安定である．これで $Z(s)$ の因子 $V(s)$ が Wiener の定理のすべての条件を満足していることが分った．

(7) 式の連立二次方程式は固有値問題 (9) に帰着されることが分ったが，ここで述べた一連の理論的結果が得られた 1960 年代半ばはこの固有値問題を有効に解く数値解法が存在しなかった．固有値を求める数値解法はほぼ対称行列に限られており，性質のよい行列に対してなら何とか使うことのできる QR 法と呼ばれる方法があるのみであった．やがて QZ 法が提案され，それをベースにロスアラモス研究所で開発された EISPAC と呼ばれるソフトが無償で公開され，制御理論の実用性が一挙に高まったのは 1970 年代の半ばである．

制御理論の研究者として線形代数には本当にお世話になった．お世話になったお礼をしなければと思い線形代数の本を出版した[1)]．数学者でもない自分に本が書けるのかどうか自信はなかったが，書き出してみると思ったよりも筆が進み，あらためて線形代数の整った体系とそこに息づいている「数理科学」の精神を体感した．応用数学の大家の先生にでき上がった本を献本して感想を伺った所，「難しい，あれでは売れるはずはない」という言葉を頂き，現代の数学のユーザーのレベル低下を大先生と共に嘆いた次第である．

参考文献

1) 木村英紀：『線形代数：数理科学の基礎』，東京大学出版会 (2003).

（きむら・ひでのり，理化学研究所）

高山　信毅

私の線形代数読書遍歴

線形代数の本はたくさんある．ちょっと目をとおして名著だなと思うものも多い．とても全部とりあげるのは不可能である．というわけで，この“名著に親しむ”は自分の本棚にある線形代数の本の中で，時間軸に沿って思い出深いものをとりあげることにしたい．

“有馬哲，『線型代数入門』，東京図書，1974”．筆者が高校生のころ読んだ線形代数の教科書である．筆者が高校生のころは数学 2B で 2 次元の線形代数をみっちりやっていた．（というわけでこの頃の高校教科書，参考書も線形代数の本として筆者には印象深い．）数学に特に早熟でなくても，ある程度興味があれば，当然のように 3 次元ではどうなっているんだろうという疑問が生じる．「数学セミナー」でこの本を読めと誰かが宣伝していたので，買って読んでみたのがこの本である．序文に筆者自身が書いているが，ベクトル空間を初めから公理的に導入し，ベクトル空間の典型例を $\mathbf{R}^n$ でなく，関数の空間とした本である．このあたりは高校生としてもカルチャーショックを受けた部分である．しかし数学 2B で群の公理とか平面幾何の公理をやっていたおかげで，無理なく読めた数学書で今に至る基礎となっている．ちなみに 3 次元ではどうなってるんだろう？ という当初の疑問に答えるにはあんまりいい本ではなかった．定数係数常微分方程式と線形空間の話題がおもしろく，小さい活字の Jordan 標準形の議論はそのころは論理を追いかけるだけで精一杯であった．ちなみに，私が昔高校生の頃勉強したような 2 次元線形代数の話題は，“長谷川浩司，『線形代数』，日本評論社，2004” の前半が詳しい．

“齋藤正彦，『線型代数入門』，東京大学出版会，1966”．大学 1 年生の教科書であった．平面と空間のベクトルから始まるスタイルは数学 2B でこれらを散々やっていたのでちょっと退屈であった．このあたりは出版年と高校指導要領のずれによるものであろう．単因子論と Jordan 標準形の部分が上記の本とずいぶん違っていた．今みると簡単であるが，当時はずいぶんと難しく感じた．基本変形など計算の話題だけでなく，同値関係，商集合，一変数多項式の初歩など，現代数学の初歩といえることもひととおり書いてある．これらは工学部電子情報等の学科でも最近は必ず取り上げる話題であるが，その頃は教養の講義だけだったかもしれない．私が学生の頃の大学での講義は，今わからなくてもとりあえず型を初めにみせておくみたいな講義であったが，今は，その場でわかる講義をしないといけないというプレッシャーがつよい．

“堀田良之，『代数入門—群と加群』”．Jordan 標準形はどの本を読んでもよくわからなかったが，大学 2 年生の後期，数学科の岩堀先生の代数の初歩の講義で Jordan 標準形が鮮やかに導出されてびっくりした．この本はその頃存在してない本だが，このとき聞いた講義の筋書きが再現されている．

“数学バイパス 6,『行列の絵本』，黒田俊郎，三省堂 S53”．名著というわけでないが，にわとり，ねこ，ぞうさんなどを線形変換する漫画がたのしかった．学生の頃ランクに親しみを感じたのは，ランク 1 の行列による線形変換漫画で猫がつぶれるのを書いたときである．

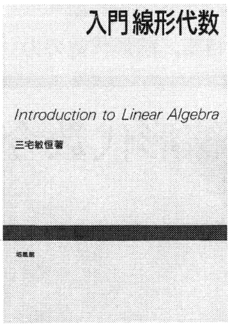
“三宅敏恒，『入門線型代数』”．大学で教えるようになってからずいぶん長く利用した線形代数の教科書である．だれでもわかる線形代数の講義ができる本である（気がした）．行列の変形の議論は Gröbner basis を導出する Buchberger algorithm そのものである．例題も適切である．簡潔で必要十分なことが書いてある名著だと思うが，どうやら行間を読んで線形代数を深く理解できるのはとくに優れた学生のみのようである．学生には昔風の（わからなくても）型から入る線形代数の参考書も買っておいてもらうのがいいように感じた．

“伊理正夫，『線形代数 I, II』”．最近読んだ線形代数の本では，これが最も役にたっているし，印象にも残っている．読みながらプログラムを書くのも楽しい．線形代数を計算の側面から見たいろいろな話題が取り上げられている．右の欄でもとりあげているが，宝の山である．

その他ブルバキ線形代数とか行列特論とか，本棚にはたくさんの線形代数の本がある．洋書もいろいろある．ここでは私にとって特に印象深い本を取り上げた．個人的な体験が読者の参考になればと思う．

（たかやま・のぶき，神戸大学理学部）

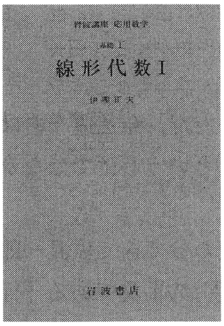
入門線形代数



三宅敏恒，148 頁，A5 判，培風館，1991.

前半はいわゆる掃き出し法および連立方程式の解法，行列式の計算法である．例題も多い．後半は線形空間が導入されちょっぴり抽象的な議論が展開される．例題も多い．理系の線形代数の教科書としては内容が少々不足かもしれないが，現在勉強している線形代数の教科書がよくわからなかったらお勧めする．“小林正典，寺尾宏明，『線形代数・講義と演習』，培風館，2007” も基礎的な例題をいろいろやってみたい人におすすめである．

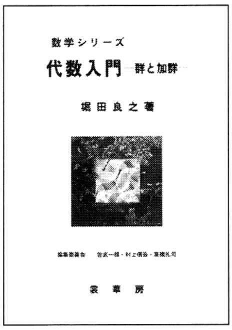
線形代数 I, II



伊理正夫，岩波講座 応用数学，岩波書店，1993.

線形代数を計算の側面から見たいろいろな話題が取り上げられている．一般化ラプラス展開，Pfaffian, QR 分解，単因子に，特殊な行列の話題，パーマネント，一般逆行列，非負行列，その他書ききれない．宝の山である．

代数入門 群と加群



堀田良之，216 頁，A5 判，裳華房，1987.

2 章，“線型代数再論” では，1 章の群，イデアル等の議論をもとに，加群の基礎概念から始まり，単項イデアル整域上の単因子論を議論する．Jordan 標準形もあざやかに導出される．線形代数を標準的な方法でしっかり勉強したあと，抽象代数学の威力を知りたい人には最適な本であろう．

線形代数今昔

齋藤　正彦（聞き手：編集部）

1. 線形代数教育の始まり

――先生が学生の頃から教員になられるまでの間で，線形代数学の教育はどのように変遷していったでしょうか．

私は新制大学の第１回生なのですが，入学したときには「線形代数」という名称の科目はなくて，数学の科目は「幾何」と「解析」いう名称でした．そのうちの「幾何」が「線形代数」に当たります．

その前の旧制高等学校の時代には「解析幾何」という授業があり，これが現在の「線形代数」の前身でした．私が受けた講義は「解析幾何」から「線形代数」への過渡期のものだったと思われます．

それでも今風の言葉である，ベクトルや行列式，



齋藤正彦氏．

行列の概念はありました．ただ，今と違うのは行列が主な対象になっているというわけではなかったことだと思います．

そのうち，だんだんと変わってきて佐武一郎さんの『線型代数学』（裳華房）の前身である『行列と行列式』（裳華房）が出まして，それが線形代数の新しい流れを作ったという感じでした．佐武さん自身は，この本は，教科書ではないと本の中でも述べているのですが，私は教科書としてよい本だと思っていましたので，教えるようになってからも使いました．

この本は線形空間（ベクトル空間）というものを本格的に取り上げた最初の本だろうと思います．それだけ，行列などよりも線形空間の話は抽象的な内容で難しいということです．論理的には線形空間の議論を先に持ってくるほうがよいのですが，この本では教育的な配慮から線形空間の話は後回しにして，最初に行列や行列式の議論，１次方程式の議論を済ませています．非常にすっきりしてよい本ですが，難しかったですね．

今の線形代数の始まりはこの本だと思って差しつかえないと思います．

また，古屋茂さんの『行列と行列式』（培風館）という本も当時としては特色があり，工学的な見地から書かれている部分がかなりあり，普通の教科書にはなかった固有値の数値計算方法から工学

や経済学でよく使う，成分が正である行列の議論や経済学への応用まで書かれていました．

もう少し歴史をさかのぼるとクーラン・ヒルベルトの『数理物理学の方法』(斎藤利弥監訳，東京図書）がありますが，この本は難しいことがたくさん書かれているにも関わらず，最初のほうに行列や行列式論の話が非常に詳しく書かれています．それはなぜかというと本が書かれた頃に行列や行列式がまだ一般的ではなかったからではないかと思います．ですから，線形代数が一般に浸透したのはそう古くはないわけですね．

今では理工系の大学を出た人なら誰でも知っていますが，そのころは誰もがそういう状態であるとは，必ずしも言えなかったわけです．

2.『線型代数入門』と『線型代数演習』

――先生のご著書である『線型代数入門』と『線型代数演習』について，その出版の背景などをご教示いただけますでしょうか．

1960年代の前半頃だったと思いますが，その当時，東京大学出版会には数学の教科書がなく，シリーズを作ったらどうかという話が出たらしく，彌永昌吉先生を中心にして，数学の先生が集まり，そのときに私が線形代数の本を書くことになりました．

すでに佐武さんや古屋さんの本の影響を受けていたのに改めて書く，というのは難しかったのですが，当時交流のあった計算機学者から線形代数を使う立場からすると，こういった抽象数学一本槍の本は役に立たないと言われまして，少し工夫して計算的な，新しい本になったと思います．

先ほどもお話ししたように，佐武さんの本は秀才向きの本でしたので，あまり難しくならないように，泥臭く書きました．

佐武さんの本によって線形空間の話がおそらく初めて入りました．私も佐武さんのまねをして，まず行列の話をもってきて線形空間は後回しにしました．また，佐武さんの本と異なる部分は，1次方程式の理論に行列式論を使わず，行列の基本変形（方程式の解き方としては掃き出し法）を使ったことです．そのころまではもっぱら計算法として処理していたのを，理論の基礎として1次方程式の理論を内容に取り入れたのが特色だと思っています．

――何かご執筆されるに至ったきっかけというのはあったのでしょうか．

ちょうど，執筆の話が出たとき，結婚したばかりでお金がなかったので，ちょうどよいと思い，執筆することにしました．

その後，本を書いてからは講義では自分の教科書を使うようになりました．そうすると，学生からの反応で，彼らがわかっていない箇所などがわかり，そういったことを参考にして『線型代数演習』を書くことにしました．

――『線型代数入門』と異なるところはあるのでしょうか．

『線型代数入門』とは大きく書き改めた箇所があり，その一つがジョルダン標準形です．

ジョルダン標準形は多くの場合，少なくとも学部の1年生で習うことはなく，東大の場合も2年生の後半に教えていました．

佐武さんの本もそうですが，証明が大変難しいのです．証明方法はおおざっぱに分けて2通りの方法があります．一つは代数的な方法で単因子論と呼ばれる，環の理論を使います．もう一つは『線型代数演習』で採用した幾何学的な証明方法で，行列論だけを使って証明する方法です．

単因子論そのものは大変立派な理論で，応用範囲の広い理論ですが，これをジョルダン標準形の証明のために使うと，この部分だけ代数的な色彩が強くなってしまい具合が悪いなと思いました．

線形代数は名前こそ「代数」とついていますが，私が教えるときには幾何のつもりで教えていましたし，本を書くときもそれを念頭においていました．『線型代数入門』を書いたときには単因子論を

使って証明をしましたが，何とか幾何学的な証明，つまり行列論だけを用いて証明はできないかと考えました．その結果，あるときにすっきりとした幾何学的な，要するに行列論だけを使って証明をする方法を見つけました．その方法を『線型代数演習』に取り入れました．

『線型代数入門』を改訂してもよかったのですが，時間がかかりそうだったので『線型代数演習』のほうに取り入れました．ですので，本当は『線型代数入門』と『線型代数演習』で一つのものとして完結することになります．

もう一つは応用数学者のことも意識して，『線型代数入門』とは違い，なるべく計算的なものをたくさん入れたことです．

大学 1, 2 年でやる行列論は実数や複素数の上のものだけですよね．一般の体の上の行列というのはやりません．したがって実数や複素数の連続性は最初から仮定されています．ところが，その連続性を使うのは固有値の存在の証明に使う代数学の基本定理の箇所だけです．他では微積分を使うことはありません．しかし使うと面白いことがたくさんあります．『線型代数入門』では第 7 章にそういった議論を取り入れました．しかし，『線型代数演習』の本を作るときは最初から連続性を仮定したほうが面白い問題がたくさんできると思い，第 2 章に「行列値関数の微積分」の項目を設けて，それから先はそういう問題をたくさん入れました．行列値関数の微積分，行列の数列，級数などの問題がたくさんあります．

その他一般逆行列とか，古屋さんの本にあった，成分がすべて正（または非負）の行列の理論も非常に面白い問題ができるので，取り入れました．

他にも工学者が好んで使う特異値分解など，普通の線形代数の本に載っていないようなものも問題にしてあります．

この本も難しすぎるとの意見をきいています．言われるとその通りなんですが，各節の節末問題は地道に計算すればできる問題が多いはずです．しかし，章末問題は非常に難しいです．章末問題を作るときは自分で論文を書くつもりで作っていました．

当時，アメリカでは線形代数専門の雑誌が 2 種類ありました．その 2 種類が東大の数学教室には毎号来ていて，それを見て適当な論文を問題として採用しました．それはそのまま載せると盗作になってしまうので，引用元も書いて載せてあります．でも，そういった問題は学生には難しく，著者の自己満足と言えばそうなんだと思います．

3. 数学的感覚

――数学と他の学問の考え方には，何か感覚的な違いはあると思いますか．

それは当然あると思います．例えば，物理の場合には実際にそこに素粒子のような“もの”が存在していますが，数学でそういった“もの”が存在しているかというと，そのような考え方はしないほうが無事だと思います．例えば，行列とか実数が「ある」と言ってもいいのだけれども，「ない」と言ってもいいわけです．具体的な実在ではない．そういうところから感覚の違いが生じるのだと思います．

物理に数学が言葉を提供していることは確かで，それはガリレオが「自然という書物は数の言葉で綴られている」と言ったようなことで裏付けられます．数学の言葉がないと物理は立ちゆかなくなるのではないかと思います．そういう意味では役に立っていると思います．それは物理に限らず，工学や生物学，化学などでも同じことが言えます．

――そういった数学の感覚を身につけるにはどうしたらよいでしょうか．

子どもが何かの計算で間違える場合でも，掛けなければならないところを足す間違いと割る間違いでは質的に違うと思います．やはり，かけ算か足し算か区別を付ける感覚――これを私は形式感覚と呼んでいますが――が大事だと思います．

数学は論理ばかりを全面に主張しますが，本当は感覚でやるんですよね．むしろ，感覚なしで進めるのは大変難しいと思います．理解することは論理だけでできるはずですが，大変難しいものだと思います．それができるという人もいますが，小平邦彦先生はできないと仰っていました．小平先生は“数覚”という言葉を使っていましたが，数覚がなければ物事は理解できないし，数学は理解できない，というようなことを言ったらしいです．

もう一つは指数感覚，つまりねずみ算のことです．ねずみ算では，自分の身体感覚をはるかにこえる結果が出てきます．

よく譬えに出すのは曽呂利新左衛門の話です．豊臣秀吉が知恵丸——曽呂利知恵丸と呼ばれていたようです——に褒美は何がよいか尋ねました．そこで新左衛門が秀吉に褒美の内容を答えたのですが，新左衛門の回答には2つの説があります．

一つは，新左衛門は将棋盤を指して，最初の1マス目に米1粒，その次に2粒，その次に4粒，$\cdots$と2倍2倍と将棋盤に置いていき，マス目がすべて埋め尽くされるまでくださいと秀吉に言ったそうです．それを聞いた秀吉は，そんなものでよいのかと言って係の者に計算させたら，途方もない数になってしまい，新左衛門に詫びをして勘弁してもらったそうです．将棋盤は $9 \times 9 = 81$ マスですから，計算すると有史以来の米すべてを集めても足りないことになります．

もう一つの説は，今日1粒，明日2粒，$\cdots$で1月分下さい，とお願いしたことです．30日だとしてもまだ常識的な範囲ですが，それでも一生かかっても食べきれないくらいの米の量になります．

このように，指数的な感覚というのは常識を越えています．

マルサスも『人口論』の中で——よくこの部分だけが引用されるのですが——「食料は算術級数的に増えるけれども，人口は幾何級数的に増える．だから将来パニックになる」というようなことを書いています．算術級数，幾何級数というのは今の言葉で言うと，それぞれ等差数列，等比数列のことです．すなわち，食料のほうが地道に $1,2,3,\cdots$ と増えていくときに，人口は $1,2,4,8,\cdots$ と増えていくから駄目だと，こう言っているわけです．

それから図形の感覚とか，力学的な直観というのも重要でそれは物理や数学の教育で養われるものだと思います．

4. これから線形代数を学ぶ人たちへ

——最後にこれから線形代数を学ぶ読者へのメッセージをお願いします．

線形代数は，授業を聞いているだけではわかりません．予習は必要ないけれども，かならず復習し，授業で出た問題を解いてください．

それでもわからなければ，線形代数のもつ意味，線形代数がどういうところに使われているかということを考えてみてください．そういう意味ではこの特集は非常に役に立つと思います．

——本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

（2007年10月，千駄ヶ谷サイエンスビルにて）

（さいとう・まさひこ，東京大学名誉教授）

線形代数で語る画像圧縮入門

川本一彦

1. はじめに

ディジタルカメラやカメラ付携帯電話はすでに多くの人が手にしていることだろう．この身近な製品の普及の背後にある基礎技術の一つとして画像圧縮がある．画像圧縮とは，膨大な量からなるディジタル画像をぎゅっと縮めてコンパクトにする技術である．この技術のおかげで，何千何万枚の画像を小さなメモリーに保存できたり，ネットワークを通じて伝送することが可能になっている*1)．この日々知らず知らずのうちに恩恵を受けている技術はどういう原理に基づいているのだろうか？その核となる技術は，意外と簡単で，教養課程の線形代数レベルで十分理解できるものである．この技術を線形代数を通して見ていくことが本稿の主題である．なお，本稿では学部初年級を主な対象とした．線形代数の教科書を片手に読んでもらえるよう，線形代数で登場する概念は**ボールド体**で強調してある．

2. ディジタル画像の量は膨大

ディジタル画像は，整数値に変換した光の強さ（色）を，図 1 のように 2 次元配列に記録したものである[1)]．2 次元配列の要素のことを画素といい，各要素の値を濃淡値などと呼ぶ．もし，2 次元配列が 1000×1000 個の要素からなるとすると，そのディジタル画像は 100 万画素の画像ということになる．各画素に，色を白黒の明るさに変換した値を持たせた画像を濃淡画像などといい，赤・緑・青の 3 原色を記録したものをカラー画像という．以下では，簡単のために濃淡画像を扱うが，本質的な点はカラー画像でも同じである．

231	77	···				
90	125	···				
⋮	⋮	⋱				

図 1　ディジタル画像の 2 次元配列．

画像圧縮の話に進む前に，このように表現されたディジタル画像がどのくらいの量を持つか見てみよう．画像がいかに膨大な量からなるか実感できれば，画像圧縮の必要性も理解できよう．

まず，各画素の濃淡値を記録するために，どのくらいの量が必要であろうか？ 濃淡値は，0 から 255 の範囲の 256 段階の整数値で表現されることが多い．このとき，濃淡値を表現するために必要な量を 1 バイト（=8 ビット）という*2)．

したがって，100 万画素のディジタル画像は 100 万バイトの量を持つことがわかる．これがどのく

*1)　もちろん，画像圧縮だけでなく，半導体やネットワークの技術革新も大きく貢献している．

*2)　0 から 255 の整数は，2 進数表記で 8 桁あれば表現できる．2 進数の 1 桁（0 か 1）の表現に必要な量を 1 ビットといい，それが 8 桁あるから 8 ビット（=1 バイト）になる．

らい膨大な量か？ 文字に換算してみよう．日本語の1文字は，コンピュータ内部では2バイトで表現されることが多い．そうすると，100万バイトでは50万字を表現できる．この原稿では，1ページあたり400字詰原稿用紙で4枚程度の文字を書いているから，50万字は300ページ以上に相当することになる．本誌「数理科学」の1つの号は，およそ100ページだから，この号に掲載されているすべての原稿の文字を集めてきても，その量は100万画素のディジタル画像のそれよりも少ないことになる．ディジタル画像の撮影はボタン1つで簡単にできるが，その一瞬のうちにいかに膨大な量の情報が生成されているか想像できるであろうか．

■ 3. ディジタル画像の分解表現 ■

まず，準備として，画像を列ベクトルとして表現する．そのために，2次元配列に格納されている濃淡値を適当な順序で1列に並べる．例えば，濃淡値を各行で左から右に向かって走査しながら積み重ねていくと，図1の画像は，

$$\boldsymbol{x} = (231, 77, \cdots, 90, 125, \cdots)^\top \tag{1}$$

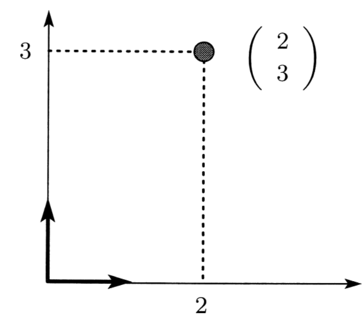
と表現できる．ここで，$^\top$ は転置を表す．この並び替えにより，画像とベクトルを同一視できる．

この画像 $\boldsymbol{x}$ のすべての要素を記憶しておけば，画像を完全に再現することができる．しかし，それでは圧縮にならない．では，どうすればよいか？ここで，聞こえてくる天の声が「汝，対象を分解せよ」である．対象を分解できれば，問題への見通しがよくなり，解決への道筋が見えてくるかも知れない．分解は，さまざまな科学・工学分野に横断的に貫く基本的な指針である．

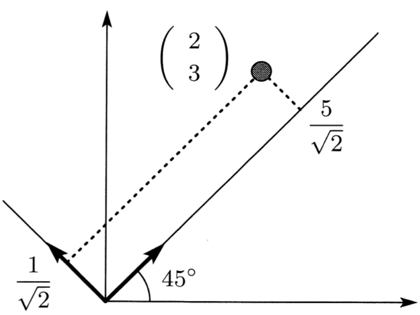
n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ のもっとも簡単な分解は，n 次元**基本列ベクトル**を用いて，

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n \tag{2}$$

と表現することだろう．ただし，基本列ベクトル $\boldsymbol{e}_i, i = 1, 2, \cdots, n$ は，i 番目の要素だけが1で残りが0になるベクトルのことをいう．式(2)の右辺の表現を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の**1次結合**といい，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を**標準基底**，そしてスカラー $k_1, k_2, \cdots, k_n$ の組をベクトル $\boldsymbol{x}$ の標準基底に関する**成分**という．このような1次結合による表現は，基底を固定したとき，ただ1通りしかないことは簡単に証明できる．これが，何通りにも表現できることになれば，画像を分解してしまうと元の画像を再構成できなくなってしまうかも知れない．例えば，2×1 画素の小さな画像 $\boldsymbol{x} = (2, 3)^\top$ は，図2(a)のように



(a) 標準基底による分解．



(b) 基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ による分解．

図2 画像の1次結合による分解表現．

$$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 \tag{3}$$

と一意に分解できる．

ただし，基底の取り方は1通りではない．例えば，図2(b)のように，基本列ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)^\top, \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)^\top$ を45°反時計回りに回転させたベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

も基底をなす．この基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ でベクトル

$\boldsymbol{x} = (2,3)^\top$ を分解してみると，

$$\boldsymbol{x} = \frac{5}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}_2 \tag{5}$$

となる．これから，この画像 $\boldsymbol{x}$ は，基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ とこの基底に関する成分 $(5/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ を記憶しておけば，完全に再構成できることがわかる．

一般に，n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ は，適当な基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を用いて，

$$\boldsymbol{x} = l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + l_n\boldsymbol{a}_n \tag{6}$$

と一意に表現できる．ただし，ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が n 次元ベクトル空間で基底をなすには，それらが**1次独立**でなければならない．もしそうではなく，それらが**1次従属**であれば，式(6)のような分解は一般にはできない．ただし，基底の選び方は無限にあるから，このような画像の分解表現も無限に存在することになる．

■　4. 画像圧縮にとって望ましい基底　■

ここまでの議論で，画像は標準基底以外の基底を選んでも，一意に分解して表現できることがわかった．画像圧縮に向けての次のステップは，圧縮にとって望ましい基底を探すことである．「望ましい」とはどういうことか？ これを見て行こう．

まず，画像圧縮の基本操作を最単純に説明する*3)．その操作とは，**ベクトルの成分の一部を無視して削除すること**，たったこれだけである*4)．例えば，式(3)で第2成分を0とし無視すると，

$$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 \approx 2\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{e}_1 \tag{7}$$

となり，この無視した成分を画像 $\boldsymbol{x}$ から除いたものを $\boldsymbol{y}$ とおくと，$\boldsymbol{y} = (\ 2\ )$ となる．すなわち，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{y} = (\ 2\ ) \tag{8}$$

とするわけである．この画像 $\boldsymbol{y}$ は，元の画像 $\boldsymbol{x}$ の成分の半分だけを記憶したものであるから，50%圧縮された画像といえる．では，この圧縮した画像 $\boldsymbol{y}$ から，2×1画素の画像を再構成するにはどうすればよいか．分解と逆の手順をとればよい．すなわち，画像 $\boldsymbol{y}$ の成分と分解に用いた基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ から

$$\boldsymbol{z} = 2\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

と再構成する．この手順は明快であるが，逆に心配になってくる．こうすれば確かに画像は圧縮できるが，こんな乱暴なことをしていいのだろうか？再構成した画像 $\boldsymbol{z}$ は，元の画像 $\boldsymbol{x}$ とは似ても似つかないものになっているのではないか？

その答えを急ぐ前に，式(4)のベクトルがなす基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ で同じことをしてみよう．すなわち，画像 $\boldsymbol{x}$ を式(5)のように分解し，その第2成分を無視して，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{y}' = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \tag{10}$$

と圧縮する．逆に，この $\boldsymbol{y}'$ から画像を再構成すると，

$$\boldsymbol{z}' = \frac{5}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}_1 + 0\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

となる*5)．図3に，元の画像 $\boldsymbol{x}$ と再構成画像 $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}'$ の位置関係を示す．

では，画像圧縮にとって，基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ と $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ のどちらがいいだろうか？ この疑問を，それぞれの基底から再構成した画像 $\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{z}'$ のうち，どちらが元の画像 $\boldsymbol{x}$ に似ているか(劣化が少ないか)という基準で考えてみよう．この準備のために，2つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^\top$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^\top$ の間の距離 $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を導入しよう．まず，これら2つのベクトルの**内積**を

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \tag{12}$$

*3) 「最単純」と断る理由は，実際には，量子化＋符号化というもう少し複雑な手順で画像を圧縮するためである．ここでは本質的な点を失うことなく単純に説明する．

*4) これは圧縮してしまうと元に戻らない非可逆圧縮の原理である．本稿では説明しないが，符号化を利用した可逆圧縮の方法もある．

*5) 「濃淡値が整数ではない」と思うかも知れないが，これは画像処理の中間段階の濃淡値であると考えよう．最終的に記録するときに，適当な範囲の整数値になるようにスケール倍して丸めこめばよい．その手続きを量子化という．

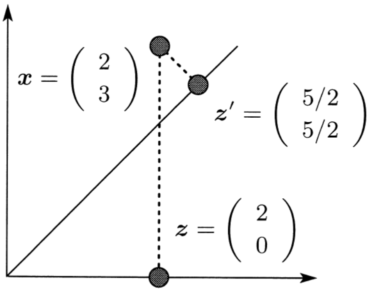


図 3　元の画像と再構成した画像.

と定義する．次に，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の**ノルム**（長さ）を

$$||\boldsymbol{a}|| \equiv \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \tag{13}$$

と定義する．これから，2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の間の距離を

$$D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|| \tag{14}$$

で測ることにする．当然，この距離が 0 に近いほど，2 つのベクトルは似ていると判定する*6)．

さっそく，元の画像 $\boldsymbol{x}$ に対する再構成画像 $\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{z}'$ の距離を求めてみよう．式 (14) から

$$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = 3 > D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}') = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{15}$$

となり，$\boldsymbol{z}$ よりも $\boldsymbol{z}'$ が $\boldsymbol{x}$ に近いことがわかる．この結果は，図 3 より明らかだろう．したがって，再構成画像 $\boldsymbol{z}'$ が元の画像 $\boldsymbol{x}$ により似ていると判定でき，標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ よりも基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ のほうが画像圧縮にとって望ましい基底といえる．

結局，画像圧縮にとって望ましい基底とは，**式 (6) のように画像を分解したとき，多くの成分がなるべく 0 に近いものだといえる**．言い換えれば，0 に近い成分は無視しても劣化が少ないため，0 に近い成分が多いほど劣化なく圧縮率を高めることができるということである．なお，再構成するとき圧縮に用いた基底が必要になるため，その基底自身を記憶しておかねばならず，全体として圧縮にならないのではないかと心配になるかも知れない．しかし，基底は 1 つだけ記憶しておき共有すればよいので，各画像に基底情報を付加する必要はない．通常，基底は画像圧縮コンピュータプログラムの中で記憶されている．ネットワーク上で画像を伝送するときも，送り手と受け手の両方で基底を用意しておけば，圧縮した成分だけ送ればよい．

*6)　ただし，人間の視覚特性はこれほど単純ではなく，元の画像に近ければ近いほど画質が向上すると感じるとは限らない．

■　5. 計算の効率化のための基底　■

次に計算の効率化という観点から，基底がもつべき性質を考えてみよう．画像圧縮の主要な計算は，分解に用いる基底に関する成分を求めることである．すなわち，n 画素の画像 $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} \approx l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + l_r\boldsymbol{a}_r \quad (r < n) \tag{16}$$

と r 個の成分だけで近似するとき，$l_1, l_2, \cdots, l_r$ を求める必要がある．このとき r/n が圧縮率となる．成分 $l_1, l_2, \cdots, l_r$ は，元の画像 $\boldsymbol{x}$ と再構成した画像の差が最小になるように決めてあげることが自然であるから，次の最小化問題

$$f = \left\| \boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{r} l_i \boldsymbol{a}_i \right\|^2 \to \min \tag{17}$$

を解いて求めることにしよう．この方法は，劣化を最小限にしようということであるから，多くの成分がなるべく 0 に近くなるようにという要請にかなう決め方である．この方法を**最小 2 乗法**といい，その解を**最小 2 乗解**という．

式 (17) の最小 2 乗解の導出は読者にゆだねるとして，結果だけを示すと，この問題は $\boldsymbol{l}_r = (l_1, l_2, \cdots, l_r)^\top$ に関する連立 1 次方程式

$$\boldsymbol{A}_r^\top \boldsymbol{A}_r \boldsymbol{l}_r = \boldsymbol{A}_r^\top \boldsymbol{x} \tag{18}$$

を解く問題に帰着される．ただし，行列 $\boldsymbol{A}_r$ は，ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ を並べてできる $n \times r$ 行列 $\boldsymbol{A}_r = (\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_r\ )$ である．式 (18) を $\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{l}_r = \boldsymbol{x}$ の**正規方程式**という．なお，幾何学的なイメージがわきやすい説明をすれば，式 (18) の最小 2 乗解 $\boldsymbol{l}_r$ は，n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が張る**部分空間**へ**正射影**したものになっている．

しかし，これでは計算の効率が悪い．なぜなら，式 (18) の解 $\boldsymbol{l}_r$ の成分 l_i は，r に応じて一般には変わるため，圧縮率 r/n ごとに式 (18) をいちいち計算しなければならないからである．例えば，$\boldsymbol{a}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^\top$ と $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)^\top$ がなす基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に対して，画像 $\boldsymbol{x} = (2,3)^\top$ を式 (18) にしたがって分解してみると，

$$\boldsymbol{x} = 2\sqrt{2}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{e}_2 \quad (r=2), \tag{19}$$

$$\boldsymbol{x} \approx \frac{5}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}_1 \quad (r=1) \tag{20}$$

となり，r の値によって $\boldsymbol{a}_1$ の成分が異なっている．通常，圧縮率はユーザが指定するものであるから事前には決められないのである．

では，基底にどのような性質を課せば，この問題が解決できるだろうか？ それは**正規直交系**という性質である．基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が正規直交系であるとは，

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \begin{cases} 1 & (i=j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{21}$$

であることをいう．図 2 で考えた基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ や $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は正規直交系である．では，画像の分解に用いる基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が正規直交系であるとしよう．このとき，式 (18) の係数行列 $\boldsymbol{A}_r^\top \boldsymbol{A}_r$ は，

$$\boldsymbol{A}_r^\top \boldsymbol{A}_r = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_r) \\ (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}_r) \end{pmatrix} \tag{22}$$

に注意すると，式 (21) より対角成分がすべて 1 でそれ以外は 0，すなわち単位行列になるではないか！ したがって，式 (18) を解くにあたって逆行列の計算は必要なくなり，成分は

$$l_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i), \quad i = 1, \cdots, r \tag{23}$$

と画像 $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{a}_i$ の内積だけから決まる．すなわち，画像は $\boldsymbol{x} \approx \sum_{i=1}^{r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}_i$ と近似されるわけである．その結果，この成分 l_i は r に依存せず，どの圧縮率でも変わらず同じ値をとる．こうなれば，圧縮率を気にせずに，単に式 (23) の内積を計算するだけで，式 (17) の意味で最適な成分を手に入れることができる．

この計算の効率化は，基底が正規直交系であれば，式 (6) のように画像を分解したとき，「ある成分を無視する」という操作と「その無視した成分を除いた部分空間への正射影」が同じであることから説明できる．もし，基底をなすベクトル同士が「斜め」になっているような基底であれば，「ある成分を無視する」という操作は，正射影に対応しないため，いちいち式 (18) を計算しなければならないのである．

■ 6. 離散コサイン変換による画像圧縮 ■

では，実際の画像圧縮で用いられている基底を紹介しよう．以下では，今までのように画像を列ベクトルで表現するだけでなく，図 1 のような 2 次元配列のまま扱うこともある．そのときは，2 次元配列上の位置 (x,y) の濃淡値を $f(x,y), x = 0, 1, \cdots, m-1, y = 0, 1, \cdots, m-1$ と表現する*7)．

まず，準備として，**離散コサイン変換**を導入する．離散コサイン変換は，$u = 0, 1, \cdots, m-1, v = 0, 1, \cdots, m-1$ に関して，

$$F(u,v) = \frac{2C(u)C(v)}{m}\sum_{x=0}^{m-1}\sum_{y=0}^{m-1} f(x,y) \times \cos\frac{(2x+1)u\pi}{2m}\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2m} \tag{24}$$

と定義される．ただし

$$C(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & k=0, \\ 1 & k \neq 0 \end{cases} \tag{25}$$

とする．この $F(u,v)$ は，離散コサイン変換係数などと呼ばれる．今までの議論と無関係なことが出てきたと唐突な印象を受けるかも知れないが，濃淡値 $f(x,y)$ を式 (1) のように並べて

$$\boldsymbol{x} = (f(0,0), f(0,1), \cdots, f(m-1, m-1))^\top$$

とおき，さらに式 (24) の $f(x,y)$ にかかる係数を

*7) 画像処理では，通常，画素位置を $(0,0)$ から始める．

$$a_{xy} = \frac{2C(u)C(v)}{m} \times \cos\frac{(2x+1)u\pi}{2m}\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2m} \quad (26)$$

として，これらを並べて

$$\boldsymbol{a}_{uv} = (a_{00}, a_{01}, \cdots, a_{m-1\,m-1})^\top \quad (27)$$

とおけば，式 (24) は，

$$F(u,v) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_{uv}) \quad (28)$$

と書けることから，これが式 (23) と同じように画像 $\boldsymbol{x}$ に関する内積を計算していることがわかる．

このベクトルの組がなす基底 $\{\boldsymbol{a}_{00}, \boldsymbol{a}_{01}, \cdots, \boldsymbol{a}_{m-1\,m-1}\}$ が，実際の画像圧縮で用いられているものである[*8]．この基底が正規直交系になっているかどうか，すなわち

$$(\boldsymbol{a}_{uv}, \boldsymbol{a}_{u'v'}) = \begin{cases} 1 & (u=u', v=v'), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (29)$$

が成立しているかどうかは読者自身で確かめられたい．正規直交系であれば，この基底に関する成分は式 (23) の内積から求まる．その内積は式 (28) そのものであるから，画像 $\boldsymbol{x}$ は，

$$\boldsymbol{x} = \sum_{u=0}^{m-1}\sum_{v=0}^{m-1} F(u,v)\boldsymbol{a}_{uv} \quad (30)$$

と分解され，圧縮するときは m^2 個以下の離散コサイン変換係数 $F(u,v)$ を記憶しておけばよい．この基底をなすベクトル $\boldsymbol{a}_{uv}, u = 0, 1, \cdots, m-1, v = 0, 1, \cdots, m-1$ を画像として表示したものが図 4 である[*9]．ただし，$m = 8$ としている．$m = 8$ の例を示している理由は，実際の画像処理では，図 5 のように画像全体を 8×8 や 16×16 画素の小さな領域に区切り，領域毎に圧縮するためである．つまり，図 4 の基底が実際に用いられている．

では，なぜこの基底で画像を分解すると多くの成分が 0 に近くなるのだろうか？ 図 4 を見ると，この基底をなすベクトル $\boldsymbol{a}_{uv}$ は周期的なパターン

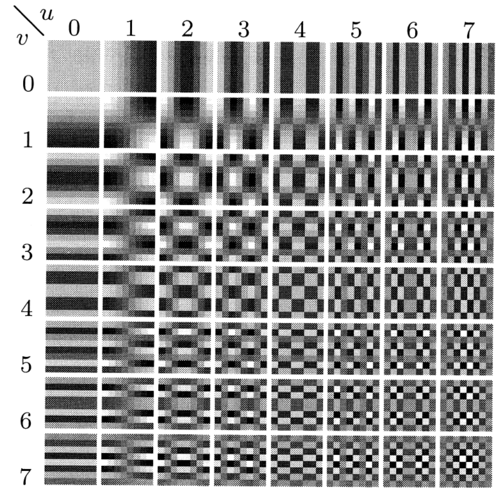


図 4　離散コサイン変換による基底．


図 5　自然画像の例．

を形成し，u, v が大きくなるほど周期が短く変動が激しくなっていく．言い換えれば，この基底は，u, v が小さいときは低周波のパターン，u, v が大きいときは高周波のパターンを形成している．この周期的なパターンが，式 (26) の中の余弦関数から生じていることは明らかであろう．つまり，この基底による分解は，**低周波から高周波の余弦関数から生じるパターンの合成によって画像を表現すること**に他ならない．ある周波数のパターンが画像にどの程度の強さで含まれているかは，離散コサイン変換係数 $F(u,v)$ の値の大小で決まる．もし，$F(u,v)$ の値が大きければ，その周波数の波は多く含まれ，逆に小さければほとんど含まれない．

経験的に，図 5 のように風景を撮影した自然画像[*10]は，8×8 画素などの小さな領域で見ると，

*8）　JPEG という画像圧縮規格で用いられているものである．
*9）　式 (26) の a_{xy} を 0 から 255 の整数になるように量子化し画像にしている．
*10）　「自然」という言葉のニュアンスは，アニメなど人工的に作成した画像ではない，という意味合いである．

高周波をほとんど含まず低周波だけで十分表現されることが多い．例えば，図 5 の空や海の領域の濃淡値の変化はゆるやかで，大きな変動はほとんどない．したがって，画像 $\boldsymbol{x}$ を式 (30) のように分解したとき，u, v が大きいときの成分 $F(u, v)$ は，ほとんど 0 に近い値をとる．この経験則が，図 4 の基底が画像圧縮にとって望ましい性質をもつことにつながるわけである．逆に，アニメなどいかにも人工的に作成した画像に対しては，この基底による圧縮はあまりうまくいかない．人工画像では，色や濃淡が急激に変化する箇所が多く，高周波を多く含んでいるためである．

■ 7. まとめ ■

もう紙面が尽きてしまうが，最後により進んだ話題を紹介して終わろう．さらなる圧縮率の向上を目指すと，最終的には「オーダーメイドの基底」という発想が出てくる．すなわち，手元にある N 枚の画像 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ から，

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| (\boldsymbol{x}_k - \bar{\boldsymbol{x}}) - \sum_{i=1}^{r} l_{ki} \boldsymbol{a}_i \right\|^2 \to \min \quad (31)$$

という基準で基底を決めようという発想である．ただし，$\bar{\boldsymbol{x}}$ は，N 枚の画像の平均 $\bar{\boldsymbol{x}} = 1/N \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{x}_k$ である．例えば図 6 のような基底を想像してもらえればよい．ここで，教養課程の線形代数のハイライトの 1 つである**固有値問題**が登場する．式 (31) を満たす基底は，$\boldsymbol{V} = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{x}_k - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_k - \bar{\boldsymbol{x}})^\top$ としたとき，$\boldsymbol{V}\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a}$ を満たす**固有ベクトル**の組になるのである[2)]．一般に互いに異なる固有値の固有ベクトルは，行列 $\boldsymbol{V}$ が**対称行列**のとき直交するので，それらは直交系をなすことも分かる．

ただし，このように決めた基底は所詮「オーダーメイド」であるから，他人と手軽に共有するわけにもいかず，残念ながら圧縮にはほとんど用いられていない．しかし，この方法はもっと最先端の技術の中で利用されつつある．顔認識[3)]という技術である．入り口ドアに備え付けられたカメラで顔を撮影し，データベースに登録された人であれ

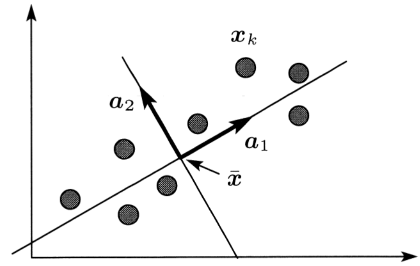
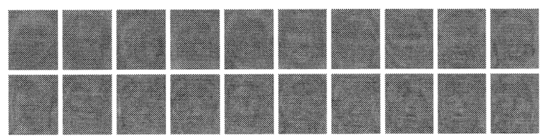


図 6　固有値分解による基底.



(a) 顔画像（Olivetti Research Labratory より）.



(b)「顔」固有ベクトル.

図 7　顔画像データベースとその固有ベクトル.

ば入場許可，そうでなければ不許可というシステムを思い浮かべてもらえばいい．図 7 の (a) が顔画像の例で，これらから計算した固有ベクトルが同図 (b) である（対応する固有値が大きいものから 20 個を表示）．これらの固有ベクトルがなす基底を用いて顔認識が行われている．このように線形代数の理論は，いろいろと役に立つのである．

謝辞：本稿は，九州工業大学工学部で開講されている線形代数の講義の中で筆者が担当した 1 回分の講義資料をもとにしている．そのような機会を与えて頂き，さらに本稿に対して有益な意見を指摘して頂いた本学の加藤幹雄先生と池田敏春先生をはじめ数学教室の諸先生に感謝いたします.

参考文献

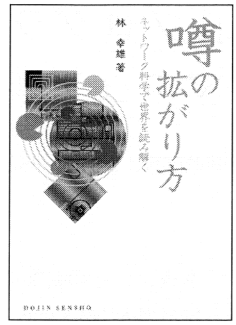
1) 田村秀行編著：『コンピュータ画像処理』，オーム社 (2002).
2) 金谷健一：『これなら分かる応用数学教室—最小二乗法からウェーブレットまで』，共立出版 (2003).
3) M.A. Turk, and A.P. Pentland: Eigenfaces for recognition, *Journal of Cognitive Neuroscience*, Vol.**3**, No.1, pp.71–86 (1991).

（かわもと・かずひこ，九州工業大学工学部）

噂の拡がり方

ネットワーク科学で世界を読み解く

林幸雄著，B6 判，196 頁，本体 1400 円，化学同人



ネットワーク科学と称される分野は約10年前のワッツ，ストロガッツ，バラバシ，アルバートらの研究に端を発して生まれたものといわれる．その後の10年間に凄まじい勢いで研究論文が発表され，既に名著と呼ばれる書籍も何冊か発刊されている．そろそろ一段落かと主要な論文誌をのぞいてみたがそうでもないらしい．ネットワーク自体の分析は一段落しているようだが，ネットワーク上の現象や事象の研究は，まだまだホットなテーマであるという印象を受ける．本書が話題としている噂の拡がり方もその例である．単純な法則での伝播を考えても，ネットワークの構造によって全体としては多様で複雑，しかし規則性が見え隠れする現象や事象が生み出される．

本書は一般向けに書かれたものであろうが，基礎的事項の再確認を含めて専門家にとっても有益な書である．ただ，ネットワークとネットワーク上の現象のつながりを説明する部分で多少の飛躍がある．また，噂の拡がり方というタイトルではあるが，噂に集約されていないので違和感を覚える読者もいるかもしれない．トピックは章ごとでまとまっているので，気になれば先に進めばよいだろう．

さて，本書は全体で7章から構成されている．章ごとにみていきたい．

第一章は，人を介して伝わるということに注目し，我々が何人程度の隔たりで結びついているかを事例で説明している．よく知られたミルグラムの実験やベーコン数だけでなく日本での事例を挙げている点が専門家を含めた読者を惹きつけるだろう．

第二章は噂の伝わるメカニズムである．他人への影響機能，情報伝達機能，娯楽機能とまとめた後で，噂のカラクリと都市伝説に分けていくつかの例を挙げている．噂の伝わり方という点では，豊川信用金庫事件以外は，話題提供といったところである．この章と五章以降のつながりの悪さがタイトルと内容のズレにつながる一因でないかと思う．ただ，話の種には使えるので肩肘張らずに読むのがよいと思う．第三章，第四章もそんな章である．第三章では，鎌倉時代から江戸時代まで時代ごとの噂の役割を情報伝達手段に注目して述べ，第四章のインターネットの威力につなげる．三章では時代背景や社会制度にまで踏み込んでいるが，四章はそのようなところがない．今を扱っているというのが一つの理由だろうが，情報伝達手段だけで古今を比較するのは苦しいところではある．

ここまでで全体の半分以上の紙面を費やしている．数学的知識もほとんど不要で，読み物としての面白さがある．第五章からがネットワーク科学の出番である．

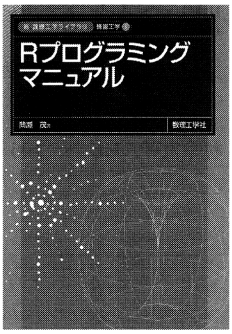
第五章では，スモールワールドモデル，ハブ，次数のベキ乗分布，スケールフリー性，優先的選択，ネットワークの頑健性といった基本的事項について説明し，情報伝達速度という観点で噂の拡がり方に結びつくが，ここから先は伝わるものが噂に限定されなくなる．ネットワーク科学の基礎を知りたければ，この章から読み始めてもよいだろう．

第六章では，ネットワークに地理的空間上という要素を加えたときの性質について述べている．著者らの最新の結果である．数学的準備不足のため，中途半端にならざるを得なかったのだろう．その点は残念である．第七章は，ネットワーク科学の立場からの飛躍はないが，論評は控えたい．

噂の拡がり方にネットワークが関与することは直感的にわかっていても，強く影響を受けるとは予想されていなかったらしい．噂をひろめる側の振舞いのほうが重要であると考えられていたからである．現在でもそのような見方をする研究者も多い．シンプルに振る舞っても，本書にあるような伝わり方をすることはネットワーク科学からの仮説である．しかし，実体験として頷けることも多いのではないだろうか．噂などというと単に拡がるだけ，そのうち消えていくもの，規則性といってもそういうものだろうと，たかをくくると痛い目に遭いそうである．

白 山　晋（東京大学人工物工学研究センター）

Rプログラミング マニュアル



間瀬茂著，**A5** 判，352 頁，本体 3800 円，数理工学社

本書は，その書名の通り，フリーソフトウェアによる統計解析環境である **R** におけるプログラミングを行う際，R に装備されているオンラインヘルプを駆使するよりもはるかに親切に，必要となる情報を得ることができる逆引きマニュアルである．マニュアルというと，一つ一つの機能，R でいえば組み込みの関数について，例えばアルファベット順などで網羅的に説明したものという印象を受けるが，本書の内容は全く異なる．R に限らず，プログラミングをいざ行おうとする際には「～ということをするためには，どういう名前の関数を使えばよいのか？」ということがまず必要になる情報であって，「～という関数を使えばどういうことができる」という情報は，その後に必要になってくるものであろう．後者は R のオンラインヘルプを参照するのが最も確実だが，著者の豊富なプログラミング経験をもとに，前者の情報の辞典となっているのが本書である．最近，Ruby や Python，Perl といった，Lightweight Programming Language（LL）を使って PC を用いた作業を効率化することが流行しているが，これらの LL の中級者向けの本として，やはり本書のように「～ということをするためにはどうするか？」という観点から書かれた書籍が多く出版されている．いわゆる，「機能逆引き辞典」とか「プログラミングレシピ」いうようなタイトルになっているものであるが，これらは実際にエディタを開いてプログラムを書いている際に，場合によっては数分間に 1 回は開くほど，なくてはならないものである．本書も同種の逆引きマニュアルであり，私が R のプログラムを書く際にも非常に頻繁に開かれる本となっている．

逆引き辞典の場合，「引く」対象となる「～をしたい」という作業目的が実際によく使われるものでなければ，その価値は半減である．プログラミングのスタイルは人によってかなりのバリエーションがあるので，著者がよく行う処理が読者にとっては滅多に使われないものであることもあるだろう．本書では，その点については心配はいらない．というのも，本書の内容は R に関する日本語の情報交換 Web サイトである RjpWiki に投稿された Q&A がもとになっているためである．RjpWiki は，WikiWikiWeb というシステムを用いた，ユーザ参加型の Web サイトで，R に関する利用ノウハウや自作の関数等をある程度読みやすくまとめて掲載したり，掲示板を設置して質疑応答を行うことが誰にでも簡単にできる．管理は私が個人的に行っており，R を 1 度でも使おうとしたことがある方にはどなたでもぜひ積極的に利用していただきたいと考えている．RjpWiki は R に関する日本語の Web サイトとしてはそれなりに有名になっているため，R を使い始めて少し経ち，少し複雑なことをやってみようとする方々からの質問の投稿が多く寄せられる．それに対して，経験豊富な先輩方からのボランタリーなアドバイスや解法も多く投稿されることで，様々な R 初学者が抱く実際の質問と，その回答という貴重な情報が蓄積されている．本書はまえがきにも書かれている通り，RjpWiki のコンテンツを基礎材料としているので，「引く」ことができる作業内容は，実際の多くの R 初学者の経験に基づいた，非常に実践的なものとなっている．最後に，本書の目次から，いくつかの作業レシピのタイトルを紹介しよう．R を少し使い込みはじめた方なら，どなたでも 1 度は悩んだことがあるテーマではないかと思う．

- ベクトルを因子にする．
- 数値を表す文字列ベクトルを数値ベクトルに変換．
- 時間差の計算．
- 関数の実行速度の計測．
- R の命令を表す文字列を評価実行する．

いかがだろうか．本書は R で実際にプログラミングを行っていく際に，このようなちょっとした疑問点にすぐに答えを与えてくれる，デスクサイドに置いておきたい一冊である．

岡田 昌史（筑波大学大学院人間総合科学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

桜井 邦朗

1978年6月号

本誌の1978年6月号に「太陽活動と地球環境」と題した解説で，1950年頃以後の太陽活動の変動傾向について，私の予測をのべた．1977年9月29日号の『ネイチュア（Nature）』誌に発表した私の論文の内容を考慮しての執筆であった．この論文によると，太陽活動サイクル20（1964–1976）に続く，サイクル21も前サイクルと同様に太陽活動が不活発で，「過去30年余りの期間の中でも，異常なものに属するかも知れぬ」と，この解説でも記した．ところが，予測に反して，サイクル21の太陽活動は非常に活発となり，次のサイクルも同様に推移した．私の予測は完全にまちがっていた．



私の根拠は，先に引用した論文で示した太陽活動の活発さの指数，相対黒点数と，太陽の自転速度（赤道）との間に，密接な逆相関の関係があるという事実に基づいていた．最近の過去約50年にわたる太陽活動は全体として，活発化の傾向を示しており，それに伴って，太陽の自転速度（赤道）が遅くなって行っている．だから，私の予測は長期的にみればまちがっていたとは言えないが，『ネイチュア』に書いた論文で予測した事態は，地球環境には起こらなかった．このように言うのは，太陽活動が不活発になり，それが長期化すると地球環境が寒冷化に向かうと予測していたからである．

このような論文を発表したがために，太陽活動の長期予測に関する後に開かれた国際会議で，同業の仲間たちに冷やかされたりする破目に陥った．しかしながら，現在進行しつつある太陽活動の活発さの増大傾向は，太陽の自転速度（赤道）が小さくなって行きつつある現状から見て，終息に向かうようにはみえない．しかしながら，2003年夏につくばで開かれた国際宇宙線会議に発表した私の結果は，ここ10年ほどについてみると，太陽活動の活発さにやや鈍化する傾向がみられることを示している．この活発さが万が一にも低下に向かう傾向が今後生じ，それが長期にわたるような事態に立ち至れば，現在進行中の地球環境の温暖化傾向に何らかの影響が出てくるものと予想されることになる．もっと強く表現してもよいと言うのであれば，この温暖化傾向が終息に向かう可能性が出てくることになる．更に，『ネイチュア』の論文で予測したように，太陽活動の活発さが極端に弱くなるなどという事態が生じ，それが長期にわたったら，現在強く懸念されている地球環境の温暖化は杞憂にすぎなかったということになるのかも知れない．

こんなことをのべながら，この予想が誤りだということになったら，研究仲間から再び皮肉をこめた揶揄や批判を浴びそうだが，これらを甘んじて受けるだけの覚悟は既にできている．このような未来予測を，ぜひ見届けたいものである．

（さくらい・くにとも，神奈川大学名誉教授）



プリンストン研究所滞在記（1976–78）

松本　幸夫

1. 招待状が届くまで

大学院の修士課程を出たのは，もうほぼ40年前になるが，1969年のことである．そのときから，プリンストンの高等研究所に一度は行ってみたいものだと思っていた．当時は就職状況が良くて，私も修士課程を修了すると同時に，東大理学部数学教室の助手に採用してもらい，意気揚々としていた．そのころ，プリンストンには加藤十吉氏が滞在中であった．加藤氏は日本のトポロジーの若手のホープで，私とは年が2つしか違わないのに，既に世界的に活躍していて，私も大きな影響を受けていた．加藤氏から毎週のように数学の便りが届いた．この頃共同研究していた「余次元2の手術理論」に関するものである．電子メールも何もない頃だったので，赤と青の縞模様で縁取りされた航空便の封書であった．薄い便箋に細いペン字でぎっしりと書かれた加藤さんの手紙に，研究所の充実した生活が偲ばれて，憧れを感じた．私もせっせと自分のアイデアを返事に書いた．

私は結婚が早く，1970年には既に妻がおり，妻と一緒にプリンストンに行きたいと思った．プリンストン研究所の研究員（メンバー）に応募するには，申請書を書いて，それまでの研究業績を説明し，これからの研究計画を書く．また，3名の推薦人に推薦書を書いてもらう．（少なくとも当時はそうだったが，今も基本的には変わっていないと思う．）私もそうした．

しかし，このときの応募はだめだった．不採用の通知がきて，私も妻もがっかりした．今にして思えば，修士論文を英文にして東大理学部紀要に発表したもの1本しか論文がなかったのだから，応募自体が無謀であった．それでもやはり，不採用の通知が来たときには落ち込んだ．

加藤氏との共同研究の成果は，「余次元2の単連結手術」という論文になり，1972年に出版された．これを，単連結という条件をはずし，基本群に制限をつけない形に一般化して博士論文にしたのは1973年のことだった．この頃から，もう一度研究所に応募してみようという気持ちが湧いてきた．ちょうど，1973年の春に，東京で多様体論の国際会議が開催され，そのとき来日したプリンストン大学のウィリアム・ブラウダー（W. Browder）に恐る恐る可能性を聞いたところ，可能性はあるのではないかというのが返事だった．それから，何となく「運が巡ってきた」ように感じたのは，同じとき，やはり多様体論国際会議に来日していたフランス高等科学研究所 IHES の所長ニコラス・カイパー（K.H. Kuiper）から，彌永昌吉先生を通じて，フランスに来ないかという話があったこ

とである．これもとても魅力的に思えて，だいぶ迷った．それで，フランス語を習いにアテネ・フランセに通ったりして，優柔不断なことを続けているうち数年が経ってしまった．日本に帰っていた加藤さんから「何で早くプリンストンに申し込まないのだ」と発破をかけられ，それで気持ちが固まって2度目の申請書を出したのが1975年である．この優柔不断の数年は無駄のようだったが，良いこともあった．それは「余次元2の手術」を利用して，トーラスと同じホモトピー型を持つコンパクト4次元多様体で，内部にトーラスを含んでいないものを構成することができたことである．複素射影平面との直積をとる操作で，4次元の話を高次元の理論に持ち込む筋書きだった．この結果をアメリカ数学会の雑誌に発表できたので，申請書に載せる論文リストが少しだけ長くなった．また，これが4次元多様体に関する私の初めての論文になった．

1976年の3月に，待ちに待った研究所からの招待状が届いた．研究所の説明や地図や資料の入った厚手の航空便が来て，嬉しかった．その頃は，駒場の数学教室の助教授になっていて，入試業務の真っ最中だったので，気持ちを落ち着かせるのにずいぶん苦労した．高ぶった気持ちで銀杏並木を歩き回ったものである．

2. 研究所に着く

1976年の8月はスタンフォード大学でトポロジーの大きなシンポジュームがあり，松本堯生氏と一緒に参加した．それが終わって，8月の末だったと思うが，単身，プリンストンに着き，研究所のアパートで，後から来る妻と5歳の娘を待つことになった．彼女たちは9月初めに到着した．その年は，日本から多くの研究者が招待されていて，内田興二氏，川中宣明氏，木村達雄氏，小池正夫氏，それに哲学者の吉田夏彦先生が一緒だった．ニューヨーク大学の久賀道郎先生も見えていた．この方たちとは家族ぐるみで仲良くお付き合いをさせていただいて，とても楽しかった．ことに，滞在2年目に入っていた木村夫妻には，車を買うこととか，今で言うレトルト食品が便利であることとか生活全般あらゆることを教えてもらい，大変お世話になった．当時の日本にはまだスーパーマーケットなど珍しかったので，広い駐車場のあるスーパーマーケットにアメリカでの生活を実感した．

アインシュタイン・ドライヴにあった研究所のアパートも当時の日本の基準では考えられないほど広く，ベッドルームが2つあり，リビングルームと書斎と台所とバス・トイレがついていた．

研究所には，このアパートから歩いて通った．研究所の森を抜けると，ごく緩い傾斜をもつ広大な芝生の土地に出る．その真ん中の一番高いところに，研究所のメインビルディング「フルド・ホール」が立っている．フルドというのは，私財を投じてこの研究所を創設した百貨店主ルイス・バンバーガー氏の妹さん（キャロライン）の嫁ぎ先の名前である．このフルド・ホールは1階に教授たちの研究室と事務室と広いホールがあり，ホールでは毎日午後の決まった時間にお茶とクッキーが出た．2階は図書室と研究室．私は，3階の南向きの真ん中の大きな部屋を研究室としてあてがわれ，何だかこそばゆい感じがした．

当時の研究所の数学の教授たちに，ミルナー（J. Milnor），ボレル（A. Borel），ラングランズ（R.P. Langlands），ハリシュ・チャンドラ（Harish-Chandra），セルバーグ（A. Selberg），ヴェイユ（A. Weil），モンゴメリー（D. Montgomery），ホイットニー（H. Whitney），モース（H.M. Morse）がいた．このうちホイットニーとモースは名誉教授だったと思う．モースは80歳を過ぎていたが，毎日，研究室に来て研究を続けていた．自宅のパーティーに呼んでくれて，そこでピアノを引いてくれたのを覚えているが，悲しいことに私の滞在2年目の6月に亡くなってしまった．

研究所から歩いて行ける距離にあるプリンストン大学には，ブラウダー（W. Browder），シアン（W. -C. Hsiang），サーストン（W. Thurston），マザー（J. Mather）といったトポロジストたちがいて，彼らの授業を聞きにいった．また，専門は違うが，岩澤健吉先生，志村五郎先生がいらっ

しゃって，ときどきお宅に招いて下さった．また，何かとアドヴァイスをいただき有り難かった．

3. トポロジー・イヤー

私が研究所に行った1976年はトポロジー・イヤーと呼ばれるほど，多くのトポロジストがメンバーに招待されていた．ジーベンマン（L.C. Siebenmann)，エドワーズ（R.D. Edwards)，ゴードン（C. McA. Gordon)，ファレル（F.T. Farrell)，ギフン（C. Giffen)，マンデルバウム（R. Mandelbaum)，モンテシノス（J.M. Montesinos)，ヤウ（S.S.-T. Yau）たちである．スペインから来たモンテシノスとは，その後，特に親しくなった．当時は，1950年代，60年代に花開いた高次元多様体のトポロジーが一段落し，人々の目が3次元，4次元の，いわゆる低次元多様体に向き始めていた時代だった．研究所に集まったトポロジストたちも，多くがそれを意識していた．

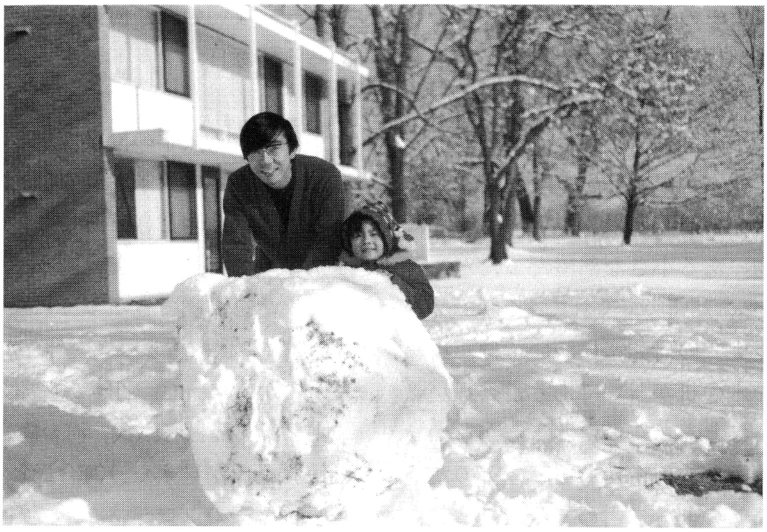
博士論文になった「余次元2の手術理論」は，それ自身としては高次元の理論だったが，工夫すれば4次元多様体の話にも使えることを東京で経験していたので，4次元についてもう少し何かできる気がしていた．そんなわけで，4次元の未解決問題を解いて，「一旗挙げよう」という気になった．問題の候補が2つあった．一つは，ある具体的なコンパクトで可縮な4次元多様体について，その境界（それはホモロジー3球面）の周期2の写像が，その4次元多様体に拡張できないことを証明する話．この具体的4次元多様体は，スタンフォードの宿舎で松本堯生氏と一緒に考えたものだったが，もし，このことが証明できると，ある4次元多様体の間の微分可能な h–コボルディズムで，積多様体に微分同相でないものが構成される．これは，5次元以上の多様体の間で成り立つ「h–コボルディズム定理」が4次元多様体の間では成り立たない初めての例になるはずのものだった．後で知ったことだが，全く同じ問題が2年後の1978年に，アクブルト（S. Akbulut）とカービー（R.C. Kirby）の連名で，カービーの低次元トポロジーの問題集に出題された．彼らも独立に同じことを考えていたのだった．

もう一つの問題は，有名な問題で，2つの2次元球面の直積 $S^2 \times S^2$ について，その2次元ホモロジー群 $H_2(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ のどの元 (a, b) が滑らかに埋め込まれた2次元球面 S^2 で表せるかという問題である．例えば，$(2, 3)$ という元はどうか．この2つの問題を，プリンストンに到着した直後から考え始めた．

4. できない，できない

研究所に滞在していても，研究だけに専念できるわけではない．子供を現地の学校へ入れることや，病気をしたときの病院通い，車を買うこと，免許を取るための運転練習，買い物など．そこで生活するためにしなければならないことがいろいろある．子供の学校については，岩澤先生の奥様にずいぶんお世話になった．運転免許は，私は生まれつき運動音痴なので，日本ではついに免許を取れなかったが，運動神経の良い妻の協力もあって，プリンストンでは無事に免許が取れた．

このようなこまごました雑事の中で，一番面倒だったのは，滞在許可の延長問題だった．これは，7月31日にアメリカに入国するとき，入国審査官に行き先を聞かれて，「プリンストンに行くが，その前にスタンフォードの研究会に参加する」と答えたのがいけなかった．スタンフォードの研究会に参加するための書類を持っているか，と言われ，「プリンストンの研究所からの書類があるので，それで十分だろうと思って，スタンフォードからのはもらっていない」と言うと，審査官のおばさんが，それでは書類が不備なので，アメリカ滞在は1カ月だけ許可する，と言って，はんこをボンと押してしまった．今にして思えば，これは一種の嫌がらせだったような気がする．しかし，これには困った．研究所に行ってから，スタッフの人たちがいろいろ努力をしてくれたが，なかなか埒が開かず，解決には半年以上もかかった．その間，書類上は「不法滞在」だったことになる．それでも運転免許がとれたのだから不思議といえば不思議である．



1977年1月．研究所のアパートの前で娘と．

ところで，私にとって，ある意味でこの延長問題よりもっと深刻な延長問題があった．それは，来年度もう1年研究所に留まりたいという希望のことだ．せっかく，こんな素晴らしい研究所にいて，日本の勤め先からも，もう1年は海外出張を認めるという寛大な許可をもらっていたので，是非，来年もここに滞在したいと思った．研究所に着いて数カ月たったころ，「来年度に滞在延長を希望するものは，今年の研究成果を研究所の然るべき教授に説明に行くこと．審査の上，限られた人数だけが延長を認められる」という通知が来た．

4次元で一旗挙げるつもりで考え出した問題は，いつまでたっても解決の目途がつかなかった．「余次元2の手術理論」で成功した特殊な交差形式の類似を4次元多様体に埋め込まれた曲面について考えてみたが，考えている問題はどうしてもその議論をすり抜けてしまう．「できない，できない」とうめきながら日を送っていた．季節は冬に近づき，空気はキーンと張り詰め，プリンストンの見事な紅葉の季節が始まっていた．

そんな中で，気持ちはひどくみじめだった．できたことといえば，ほとんど気晴らしに考えた「ロホリンの定理の初等的証明」だけだった．これは，研究所に来る前に，「スピン構造をもつ閉じた4次元微分可能多様体の符号数は16で割り切れる」というロホリンの定理の証明を納得行くように理解したいと思い，ロホリンのロシア語の原論文に当たってみたことが遠因だったと思う．その頃は，第2外国語で選択したロシア語を読む能力がまだ残っていたのだった．読んでみると，そこには肝心なことが分かるようには書かれていないと思われた．ロホリンの定理のケルヴェアとミルナーの別証明というのがあったが，これは球面のホモトピー群の計算に話を帰着させるもので，初等的な証明とは言えなかった．

そこでもっと初等的な証明ができないかと考えて，思いついたのが，トーラス結び目のアーフ不変量の計算に帰着させる証明法だった．これはかなり初等的で，私にも理解可能なものだった．これをミルナーのセミナーで話させてもらったのが，半年間の滞在の唯一の成果だった．

5. 補欠になれた

こんなことでは延長はとても望めないと思い，延長の申請は諦めるつもりでいたら，久賀道郎先生から，申請しないうちから諦めてしまうのは良くない．是非申請してみなさい，と励まされた．それでとにかく申請書を出した．

出したからには，研究所の然るべき教授に会って，自分のことをいろいろ説明しなければならな

い．そこで，ミルナーのところに行って，考えている問題がうまく解けないこと（そんなことを説明しても仕方がないと思ったが）とか，日本にいて考えた余次元2の手術理論（これも研究所での成果ではないので，仕方がないと思ったが）とかを説明した．ミルナーの研究室はフルド・ホールにはなく，別の建物にある小さな部屋だったが，そこで，ただフン，フンと聞いてくれて，それで終わりになった．ミルナーの研究室については，真ん中に比較的大きな木の机が置いてあり，それが論文の山になって，ほとんど空いたところがなかったこと，コンピュータが何台かあって，そのための配線が床のかなりの部分を占めていたこと，自転車が1台置いてあったこと，その程度のことしか思い出せない．

研究所からは何の音沙汰もなく，1, 2カ月が過ぎてしまったが，ある日，「補欠として名前を残しました」という通知が来た．わー，ウソみたいだ，なんて有り難い，これで希望がつながったと思った．しかし，喜びも束の間，不安は一向に解消しない．いつになったら本式に採用されるのか分からないし，何カ月も待ったあげく，結局不採用ですということになったらどうしよう．こういう中途半端な状態が更に数カ月続き，翌1977年の5月になってしまった．研究所も休暇に入っていた．志村先生が心配してくれて，「研究所は怪しからん，遠慮しないで問い合わせてみなさい」と言ってくれた．そこで，優しそうなモンゴメリー教授に尋ねると，「まあ90パーセントは大丈夫だよ」という返事だった．不安ながらも気持ちが少し楽になった．吉田夏彦先生御夫妻とナイアガラの滝を見に行ったのもこの頃だったと思う．

6. 2年目の研究所

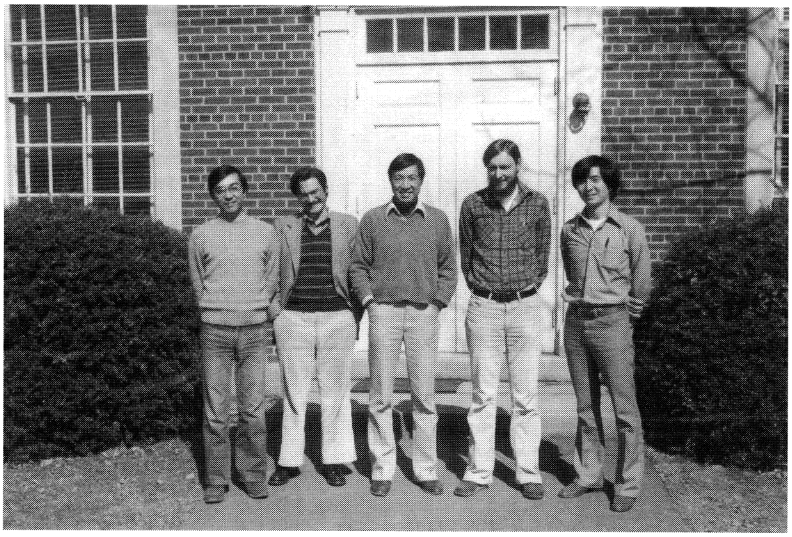
それから更に1カ月がたち，1977年の6月に「正式に延長を認めます」という通知が来た．抑えられていた気分が一気に吹き飛び，晴れ晴れした気分になった．だいたい，人間はプレッシャーの下で良い研究ができるものではない．延長問題さえなかったら，研究所にはもともと何のプレッシャーもないのだ．何をしていても基本的に自由である．毎日，フルド・ホールに行ってお茶を飲み，人と議論し，オフィスで勉強する．あるいはプリンストン大学の授業を聴きに行く．特に成果を挙げることも要求されない．理想的な研究環境だと思う．ときどき，所長主催のパーティーもある．私も2年目にして，ようやくこのような研究所の生活を満喫できるようになった．

2年目の秋に新しいメンバーが来て，研究所はまた賑やかになった．日本から，後藤守邦先生，後藤ミドリ氏，峰村勝弘氏，河合隆裕氏，柏原正樹氏，太田雅己氏が見えた．河合氏と柏原氏はスペシャル・イヤーのプロジェクトで招待されたのであった．それから，物理学者の岩崎洋一氏も見えた．トポロジーでは，2年目の延長を認められたモンテシノスがいて，新しくヴェネマ（G.A. Venema）とパオ（P. Pao）が来た．

私も，例の4次元の2つの問題にこだわるのを止めた．すると，不思議に研究が進みだした．一つは，高次元の話題だが，「余次元3で位相的に埋め込まれた部分多様体はPL埋め込みで近似可能である」という本間・ミラーの定理が余次元2では成り立たない反例が構成できたこと．これも余次元2の手術理論の応用だった．それから，河内明夫氏の無限巡回被覆の不変量を使って，デーンの補題の4次元での反例ができた．これはヴェネマとの共同研究だった．こんな反例ばかりでつまらないと思うかも知れないが，高次元の不変量や結び目の不変量を利用して，4次元世界の様子を何とかさぐろうとしていたのがこの時代だったのである．

プリンストン大学では，3次元多様体論に双曲幾何を応用するという，サーストンの講義が始まった*1)．また，この頃，きな臭さを増していたキャッソン・ハンドルについてのセミナーを，シアン，パオ，モンテシノス，ヴェネマたちと定期的に行った．キャッソン・ハンドルは，数年後にフリード

*1) 筆者はいくつかのところで，サーストンの双曲幾何の講義が1976年に始まった，と書いたが，これは記憶違いでした．例えば，2007年の東大数学同窓会の会報にそう書いてしまいました．



1978年の4次元セミナーの仲間たち．左から，筆者，モンテシノス，シアン，ヴェネマ，パオ．

マン（M.H. Freedman）が4次元ポアンカレ予想を解くときの本質的な道具となった．

このように，研究所滞在2年目の生活は充実していた．おまけに，ジーベンマンが手配してくれたおかげで，1978年の5月に，モンテシノスと私でパリ大学とIHESを訪れることができた．夏にヘルシンキで開かれた国際数学者会議に出て，日本に帰ったのは1978年の8月だった．

7. ゲージ理論

ドナルドソン（S.K. Donaldson）がゲージ理論を持ち込んで4次元多様体論を一変させたのは1980年代の初めである．私が「できない，できない」と苦しんでいた2つの問題は両方ともゲージ理論にからむものだった．可縮4次元多様体の境界の周期2の写像の問題はゲージ理論を応用してアクブルトが解決した．もう一つの $S^2 \times S^2$ の問題は，やはりゲージ理論を使って久我健一氏が解いた．ゲージ理論導入以前の1976年では，私がいくら頑張っても，この2つの問題を解くことは不可能だったわけである．

（まつもと・ゆきお，学習院大学理学部）



物理学への紆余曲折した道のり

藤川　和男

1. スプートニクの頃

まず，若い頃の思い出話から始めたい．私たちの世代には，スプートニクの打ち上げに興味を持ち科学の道へ進んだという人が多いと言われている．事実，私自身も中学生の頃にスプートニクのニュースで夕方空を見上げた記憶はある．しかし，自分自身理科系の分野に将来進もうと考えたのは高校生のときだったように思う．淡路島の田舎の高校ではあったが進学クラスというのがあり，そこには頭のよい友達が大勢いた．勉強に関していえば，生物の先生が新しく兵庫県の香住の水産試験所から赴任されてきて，情熱のこもった教育をされた．メダカの観察等は今も覚えている．物理に関しては，高校に若い物理の先生がいて，教室で重力定数の測定実験等をして見せてくれた．この先生は後に確か阪大の工学部関係の助手になられて転勤されたように記憶している．化学にもユニークな年配の先生がおられて，物理部であったか化学部であったか忘れたが，そのような名前のクラブがあって，秋の文化祭のときに近くの原っぱで小さなロケットの打ち上げを行い，あるときなどは観客のほうへ飛んで危うく惨事になりかねないようなこともあったと記憶している．1950年代の終わりから60年代の初めにかけてのことで，日本でもカッパロケットと呼ばれるロケットが打ち上げられていたころである．

高等学校では講義の予習と復習をまじめに行うというようなことはなく，全く自己流の勉強で，数学の受験雑誌の問題などには興味を持って挑戦した．また数学の先生の一人がボランティアとして早朝に授業開始前に開催されていた3年生向けの受験数学の勉強会に，2年生のときに参加したりという具合に正規の授業以外に精を出したように思う．また，高等学校の新聞部とか文芸部とかに顔を出し，記事を書いたり真似事のような詩とか短歌を作ってみたりした．「学燈」という国語の受験雑誌にエッセイのようなものを書き掲載されたこともある．今考えると，その後の勉強とか研究の自己流のスタイルをこのときに身につけたように思う．これは良かった面もあるが，素直に育つといった側面は阻害されたように思っている．

2. メスバワー効果とチューリング計算機

3年間の高等学校を終えて，友達と夜行列車で東大の受験に出かけ無事理科一類に合格した．1961年の4月であり，有名な日米安保闘争が終わった翌年であった．大学での最初の一年ほどは，相当授業にも出席し素直に勉強を続けた．これには，最初の1年半の成績で，学部への進学振り分けが

決まるという事情があった．当時は，生物学の重要性がある程度叫ばれ始めたころであり，私も選択であったが生物を取り江上先生等の講義を聞いたが，カエルの解剖のときになって，あのホルマリンの強い臭いのするドラム缶のようなところから死んだカエルを取り出して解剖するときになって自分は到底この分野の研究はできないと考えてあきらめた．動物を解剖しなくて良い数学とか物理学に戻った．大学の2年生の後半には，物理学の本格的な講義も始まり，古典力学の演習もあり助手をされていた小沼通二先生等が非常に難しい問題を出されて学生で競って解いたが，級友の中にベクトル算で非常に幾何学的な直感のある人がいて感心させられたりした．その後，解析力学が始まりこれはあまり幾何学的な直感を必要としないので，好きな科目になった．また数学の彌永昌吉先生の講義等もあり，数学科の飯高茂君とか新谷卓郎君等とも面識を得て，一緒に当時政府が出していた「大学管理法」反対のビラ配りを新宿駅で行ったりした．クラスの担任をされていた数学の齋藤正彦先生から最近あまり聞かなくなったブルバキ（Bourbaki）のフランス語の教科書を借り出して読んだりもした．新谷君とは本郷へ進学してからも下宿へ遊びに行って，岡潔のエッセイ集を新谷君がすばらしいといって撫でるように大事にしていたのを憶えているが，残念ながら同君は若くして他界した．

本郷へ進学した3年からはまた夜型の悪い癖が出て，講義にあまり出なくなった．期末試験の1週間ぐらい前になると，級友の大林君から講義ノート一式を借りてきて即席で勉強して試験を切り抜けた．量子力学演習と物理数学演習のクラスだけは問題を解くのがチャレンジングでよく準備して出席した．学部時代の思い出と言えば，東大の5月祭で3年生のときはメスバワー効果の模擬実験を森永晴彦先生のところで4年生の先輩の手伝いをして実行したこと（ただし，効果は測定されなかった）と，4年生のときには友達を誘ってチューリング計算機を継電器を用いて作って模擬運転を行ったことが主なものである．このチューリング計算機は，後藤英一先生がほとんどすべてを作ってくださって，私たちは横で見ていたというのが正しいものであったが，チューリングの原論文をみんなで読んだことが思い出である．一時は，この影響で計算機科学の方面（この分野も今考えれば萌芽期であった）へ進むことも考えたが，やはり当時主流であった伝統的な物理へ進むことになった．その他，4年後期の卒業実験では当時助手をされていた富家先生にくっついて，冬の寒い深夜に田無にあった原子核研究所へ出かけて，電子の測定装置の中に電流を通した電線を張り軌道の修正を行うワイア・メジャーメントというのを手伝ったのが思い出に残っている．また4年の後期には，ゾンマーフェルトの教科書にあった非相対論的な水素原子のシュレーディンガー方程式の厳密解の一般化として，クーロン場の中のディラック方程式の散乱の厳密な扱いに熱中して2, 3カ月費やしたが成功しなかった．

このように，あまり授業に出ず自己流の勉強を行ったが，今になって考えれば，もう少し授業にまじめに出席するべきであったと考えている．とくにあまり講義に出なかった統計力学は，その後遥動散逸定理と摩擦のあるトンネル効果に関する論文を書いたりしたのを契機に，7年ほど前に東大の学部3年の講義を担当することになり本格的にギブスの教科書等を含めて勉強し直すまではあまりなじめず，理論物理家としてはかなり偏ったものとなった．

3. 3個のニュートロンの結合状態

当時の若い物理の学生にとって，エンリコ・フェルミは理論も実験もできる万能の天才で憧れの一人であった．少なくとも私は，まず実験を勉強したいと思い，メスバワー効果の縁で森永先生の研究室で原子核の実験を専攻することになった．森永先生はすべての事柄に非常にユニークな意見を持っておられて，私のような修士の学生にも一人前の扱いをしてくださり，文字通り毎日一対一で物理の議論を行った．どうしてか私にはあまり回路とかハンダ付けの練習はするなという意見で，

そのため実験ではあったがものづくりの方面はあまりせず，もっぱら森永先生と与えられた少数の測定器でどんな実験が可能でどの程度の精度で結果が求められるかという議論をした．最初に先生と書いた論文はチタンの52という同位元素を同定する実験であった．これは森永先生得意の分野で，要するにある特定のこれまでは知られていなかった同位元素の質量を近くのよく知られた同位元素から測ってどの程度ずれているか，またその同位元素のベータ崩壊の寿命を確定する実験であった．

修士論文のテーマはニュートロンが3個結合した原子核が準安定に存在できるかどうかという実験であった．当時,「Physical Review Letters」にインド人のミトラ（Mitra）という人が，原子核には核子が3個集まると2個の場合に比して質的に異なる力が現れる可能性があり，したがって2個のニュートロンの結合状態は知られていないが3個の場合にはあるいは準安定な状態が存在できる可能性があるという論文を書いた．この論文に刺激されて，森永先生と（3個のニュートリノの束縛状態である）トライニュートロンの探索実験を開始した．手法は，森永先生の得意とする放射化分析の手法であり，化学教室の放射化学の専門家の若い先生に意見をお聞きしたりして，田無の原子核研究所のサイクロトロンを用いた実験を開始した．要するに，トライニュートロンが存在する場合にのみ引き起こされる核反応の存在を間接的に調べるものであった．結果は否定的なもの，すなわち我々の精度では確認できないというものであったが，これで修士論文を書きまた後に森永先生と連名の論文を書いた．この研究は，狙いがかなりユニークだったためか，博士課程の1年の5月ごろに物理教室の談話会で私が話をすることになった．談話会の前列には久保亮五先生や後藤英一先生が座っておられ，久保先生からはニュートロンのリキッド（液体）のようなものかというような質問をいただいた記憶がある．

これより少し以前に森永先生および先輩の勧めでアメリカの大学院へ出かけることになり，プリンストン大学から入学許可をもらった．やはり，森永先生や先輩の意見で，プリンストンでは高エネルギー物理学の実験に良い先生が大勢いるのでそちらへ進んだらどうかとの助言をもらい，そのこともあって博士課程1年の前半は田無の原子核研究所の電子シンクロトロンでガンマ線を核子に当てて2個のパイ中間子を作る実験の手伝いをした．当時の日本の高エネルギー物理学の実験はまだ始まったばかりで，世界の最先端を行っている現在では想像もできないことではあるが，外国の実験結果に結果が一致すれば大喜びをするというレベルからあまり遠くなかった．

4. プリンストンの3年間

博士課程1年の1967年の9月にアメリカのプリンストン大学へ出かけた．まだ貧しかった日本に比して当時のアメリカの豊かさは驚くべきものであった．プリンストンの物理の大学院は少数精鋭主義で，1学年30名程度であったように思う．学生はプリンストンの学部出身者は取らないという決まりなので，ハーバードとかバークレイとかカルテック（カリフォルニア工科大学）の学部出身者が大部分であった．そこに少数の地方の大学始まって以来の秀才と呼ばれるような人たちとか少数の外国の大学出身者が混じっている状態であった．講義は，学部の基本的な科目をもう一度レベルを高めた形で教えるという形態であり，熱力学はウィグナー先生が教え，量子力学はワイトマンが教えた．後に私の指導教官となったトリーマン先生は場の理論の入門的な講義をされた．一般相対論はウィーラーとバーグマンが教えていた．また実験でも，クローニン（後にノーベル賞を受賞）がK中間子の物理を中心に素粒子物理の講義をした．

当時の日本では，湯川先生の影響もあり，素粒子物理は終わったというような雰囲気もあったが，プリンストンは全く逆で素粒子物理とか高エネルギー物理が非常に盛んであった．またディッキーと若手のウィルキンソンが宇宙背景輻射の研究を続けていたし，ウィーラーは重力理論の大御所として，当時現実味を増していたブラックホールの物



プリンストン大学素粒子物理実験棟の前にて（1968年8月）．

理を研究していた．このような雰囲気の中で，友達とワイトマンの本をテキストに公理論的な場の理論の勉強会をもった．もともと実験をやるつもりでプリンストンへ出かけ，またRA（リサーチ・アシスタント）として原子核の実験の研究室で午後には手伝いをした．しかし，プリンストンでの原子核の実験は当時新しいサイクロトロンが完成しかかっていたが，あまり興味が持てなかった．

一年が終わり68年の夏休みには（日本を出るときに武田暁先生からクローニンは非常に優秀な人なので指導教官に選んだらどうかと言われていたこともあり）クローニン先生のところで2カ月ほどサマージョッブというパートの仕事をした．このときは，クローニン先生の学生の一人とK中間子実験のための畳一畳ぐらいの大きさのスパークチェンバーを数枚作成した．高圧電源を掛けると宇宙線のミュー粒子が測定され，楽しい経験であった．また昼食時にはクローニン先生の車で，研究室の数人の学生と学外の近くのレストランへ昼食に出かけた．夏休みの終わりには，スパークチェンバーを一緒に作ったハーバード出身の学生とボストンへ出かけ，そこで彼の友人のハーバードの文学部の大学院生の夫妻と一緒にアメリカ北部のニューハンプシャー州で山登りをした．

この夏休みの前に大学院生向けのGeneral Examinationという試験を受け，博士課程への進学資格を得ていたので，秋には指導教官を選ぶ必要があった．クローニン先生のところで実験を続けるか（事実クローニン先生には大歓迎すると言って頂いた）あるいは親しくしていた友人たちが多くいた理論物理を取るか迷ったが，結局トリーマン先生のところで，高エネルギー物理の理論を研究することにした．日本で言えば博士課程2年の秋であった．

トリーマン先生から与えられた問題は，レプトン（電子とかミュー粒子およびニュートリノ）の間の弱い相互作用の研究に関するものであった．弱い相互作用がくり込み可能でないことと関連して確率の保存（ユニタリー性）を破ることが知られていたが，当時プリンストンの高等研究所に滞在していたゲルマンたちはこの解決策の一つとして現在の言葉で言えば中性カレントが存在し，しかもその相互作用は相当強い可能性を指摘していた．この相互作用が本当に存在するか否かの実験をするための計算が主題であった．まずファインマン図の勉強から始めて，確率の式を求めディラックのガンマ行列に関するトレースを計算し次に終状態に現れる3個のレプトンの位相空間の変数についての積分を解析的に遂行するというのが問題であった．問題自体は明確なものであったが，計算

(特に解析的に積分すること) が非常に複雑であった. 積分を一つ遂行するごとに項の数がどんどん増えて, 何時終わるとも知れない感じがした. トリーマン先生は, 有限回の計算で答えが出るからがんばれといったコメントで励ましてくれた.

この計算と平行して, プリンストン高等研究所から大学に顔を出していたアドラーが中心になって学生たちが量子電磁力学のくり込みの勉強会をもった. とくにくり込み群の議論等が詳細に議論された. これは今考えてみれば, その後のゲージ理論の発展にとって非常に基本的な事柄であった. また, 後に超弦理論で有名になるシュワルツもプリンストンの若手の助教授をしていて, 彼を中心にして解析的 S 行列の勉強会をもった. これはその後直接にはあまり発展がなかったが, シュワルツ自身は後にベネチアーノ模型の変形として当時プリンストンに滞在していたヌヴーと共同でパイ中間子の散乱模型を考察し, このときに使われた手法が現在も超弦理論の分析において基本的になっている.

上記のレプトン散乱の計算はかなり大規模な (当時最速といわれた IBM360 を用いた) 数値計算を併用して一応の答えが出たのが 1 年半後ぐらいであったが, これで博士論文をまとめて Ph.D. を取得することになった. 計算の結果はその後のフェルミ国立研究所でのニュートリノ実験の計画に用いられた. またトリーマン先生が, シカゴ大学のエンリコ・フェルミ研究所の理論関係の責任者をしていたサクス先生に電話をしてポストドックの職を見つけてくれた. プリンストンの 3 年間はいろいろと勉強以外にもアメリカ社会での経験をしたが, 物理に関して言えば, ファインマンとかバーディーンを先輩に出した物理学科であり, 多くの世界的な物理学者のセミナー等を聞きまた高名な教授の講義に出席し, 物理の研究とは何かが少しわかってきたように思われた.

5. シカゴ, ケンブリッジそして東大核研

さて, 1970 年の 7 月に持ち物をすべておんぼろの車に載せてシカゴへ向かった. そのときは, 東大の同級生で (その後宇宙のバリオン数の研究で著名になる) 吉村太彦さんがシカゴの南部陽一郎先生の下で Ph.D. を終えて, バークレーへポストドックで出かける直前であった. シカゴに着いて間もなく吉村さんから南部先生が書かれたコペンハーゲンで行う予定の講義録のプレプリントのコピーを頂いた. これは, 後に南部・後藤の作用と呼ばれることになる弦理論の基本的な作用を提案したものであり, また南部先生が都合でコペンハーゲンへの旅行を中止され, そのために幻のプレプリントと呼ばれることになったものである. ちなみに, 私が現在奉職している日大理工学部の量子科学研究所は後藤鉄男先生が上記の論文を南部先生とは独立に書かれた場所である.

プリンストンの最後の年辺りからまた昔の夜型の癖が出て, 朝方まで勉強をして昼過ぎまで寝るスタイルになっていたが, シカゴでも同様であった. シカゴでの最初の一年は, プリンストンでの学位論文を雑誌に発表する準備をしたのと, 毎日のように世界中から研究所に送られてくるプレプリントを手当たり次第読む日々であった. 当時素粒子物理の中心であった電子を陽子にぶつけて陽子の内部構造を探る実験の理論的な分析に関して, その後基本的になるクォーク・パートン模型ではなく S 行列理論的な立場からの論文を書いたのが唯一の仕事であった. これは, 桜井純先生も UCLA (カリフォルニア大学ロサンゼルス校) で類似の研究をされ, 南部先生から桜井さんが褒めていたというようなコメントを頂いた. しかし, 依然として理論物理で本当にやって行けるのか自信のない日々であり, アメリカへ出かけて 4 年ぶりに 71 年夏に 1 カ月ほど日本へ帰り, 奥の細道を逆にたどる日本国内の旅行をしたりして, 少し元気を取り戻しシカゴへ帰った.

シカゴの 2 年目には, プリンストンで一緒だった (その後 CP の破れで有名な研究をされた現神奈川大学の) 三田一郎さんがシカゴ郊外のフェルミ国立研究所に移って来られた. 丁度そのころトホーフトが, ヤン・ミルズ場のくり込み可能性を指摘する論文を書いた. 特にフェルミ研究所にい

たB.W.リー教授がアメリカでのこの分野での第一人者であり，72年の年明けの頃から三田さんと一緒にリー先生と共同研究を始めた．最初は，弱い相互作用のミュー粒子の磁気モーメントへの補正とかレプトン散乱の計算を目指していたが，計算に不定性があることに気づき，最終的にはゲージ場の量子化に便利で計算結果にも不定性の出ない R_ξ ゲージというゲージ条件を提案する共著の論文になった．この論文は完成したのが72年の6月頃であったが大変評判が良く，私個人にとっては理論物理でも何とかやって行けるのではないかという自信にもなった．

このようにしてシカゴでの2年間が過ぎ，アメリカへはフルブライトの交換学生という身分で出かけたためアメリカを出る必要があり，トリーマン先生の紹介でケンブリッジ大学へポストドックで出かけた．途中，夏休みに日本へ帰り上記のリー先生と三田さんとの共著論文について方々の大学等でセミナーをした．ケンブリッジでの1年間は，せっかく上記のようにゲージ理論の分野で世界の第一線に躍り出て，事実イギリスでもオクスフォード郊外での研究会でサラーム先生と並んで招待講演を行ったりエディンバラ大学のヒッグスさんからセミナーに呼ばれ出かけたりしたが，その後の大きな発展には関与できなかった．ベクトル中間子とかパイ中間子（ハドロン）への電磁補正の計算をゲージ理論の手法を使って計算した論文は，73年のボンでのレプトン・フォトン会議のサマリーでブジョーケン先生に名前を挙げて評価して頂いたが，物理学へのインパクトといったものは皆無であった．これは，多分に私自身に物理学で何が本質的かを見る目がなかったことが原因であった．とくに，ゲージ理論の漸近自由性の発見にはリー先生から類似の計算を頼まれていたのに実行せず何ら寄与できなかったのは，リー先生に対しても申し訳なく思っている．ケンブリッジ在任中の唯一の成果としては，12月のクリスマスの前にドイツのカールスルーエのベス教授を訪問し，セミナーを行いその後の交流の基を作ったことが挙げられる．

73年の初めには，東大原子核研究所の助教授をされていた菅原寛孝先生の助手に原康夫先生等の推薦で決まり，日本で一応のパーマネントの職を得ることができた．

6. おわりに

このようにして，73年の9月に原子核研究所に着任し私の紆余曲折した理論物理学への道が一応終わり，独立した研究者としての道を歩み始めた．しかし，私は理論物理の教育をすべて英語で受けたので，日本へ帰り日本語で研究を始めるとなると全然調子が出ず最初の一年は論文が書けなかった．このため，74年の夏にベス先生を頼ってカールスルーエとその後DESY（ドイツ電子シンクロトロン研究所）へ夏に2カ月ほど出かけ，そこで当時起こり始めていた超対称性の超場を用いた場の理論の定式化を完成させた．これで，再び自信のようなものが得られ，日本へ帰った．

その後も試行錯誤の連続であったが，79年には量子異常を経路積分で定式化することに成功し，その後はゲージ理論と量子異常を弦理論を含む様々な問題へ応用することに20年ほど費やし，3冊の本にまとめた[1]．

現在，私の理論物理への道を振り返るときに，数年前に山口嘉夫先生から言われた「君も，実験を続けて一流の学者になったほうが良かったかも知れないね」という言葉が思い起こされる．私が実験を続けたほうが成果を挙げたかどうかは自信がないし，一回しかない人生を自由にいろいろ試してみたことは楽しかったと思う．最後に，このような非常に個人的な経験がこれからの進路を考えておられる若い読者の人たちに何らかの参考になればと願っている．

参考文献

1) 藤川和男，『ゲージ場の理論』岩波講座 現代の物理学 20，（岩波書店，1993）；藤川和男，『経路積分と対称性の量子的な破れ』（岩波書店，2001）；K. Fujikawa and H. Suzuki, *Path integrals and quantum anomalies*, (Oxford University Press, 2004).

（ふじかわ・かずお，日本大学理工学部）

特　集（2008年7月号予告）

物理的思考法のすすめ

諸分野におけるキーポイント

本体952円

編集後記

今月号のラインアップを眺めてみると，今や線形代数が様々な分野で必需品になっていることがよくわかります．だんだん学習していくと，難所にぶつかることもあると思います．そんなときは今月からの新連載「数学の道しるべ」をご覧下さい．（大溝）

＊　　＊

今回の特集は理工系の入門，線形代数です．記事も，通常のものからコラム，インタビュー，名著，単発ものまで様々に取り上げてあります．今の学問として成立するまでの話や諸分野での応用など，入門であるがゆえに奥深い，その行と列の無限を楽しんで下さい．（伊崎）

数　理　科　学　6月号

2008年6月1日発行　　発行人　木　下　敏　孝

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

編集スタッフ
平勢耕介　伊崎修通
大溝良平

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.

発行所　©　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁